

АЛГЕБРА

9



**Ш. А. АЛИМОВ, А. Р. ХАЛМУХАМЕДОВ,
М. А. МИРЗАХМЕДОВ**

АЛГЕБРА

**УЧЕБНИК ДЛЯ 9 КЛАССОВ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ**

*Утвержден
Министерством народного образования
Республики Узбекистан*

**ИЗДАТЕЛЬСКО-ПОЛИГРАФИЧЕСКИЙ
ТВОРЧЕСКИЙ ДОМ "O'QITUVCHI"
ТАШКЕНТ — 2006**

Условные обозначения

 — начало и окончание решения задачи

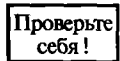
 — начало и окончание обоснования математического утверждения

 — знак, отделяющий обязательные задачи от дополнительных

 — более сложные задачи

 — текст, который важно знать и полезно запомнить

 — выделение основного материала

 — самостоятельная работа для проверки знаний по основному материалу

 — тестовые задания

**Учебник издан за счет бюджетных средств для ОБОРОТНОГО
ФОНДА УЧЕБНИКОВ (ОФУ).**

А 4306020502 — 57 бл. - заказ — 2006
353(04) — 2006

ISBN 5-645-04565-3

© ИПТД „O‘qituvchi“, перевод
с узбекского, 2006

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ 7–8 КЛАССОВ

В курсе алгебры 7–8-х классов вы познакомились с алгебраическими выражениями, одночленами и многочленами, разложением многочленов на множители, алгебраическими дробями, неравенствами, линейной функцией и ее графиком, системами двух линейных уравнений с двумя неизвестными, приближенными вычислениями, квадратными корнями.

Для закрепления пройденного материала вам предлагается решить следующие примеры и задачи.

1. Упростить:

1) $(5a - 2b) - (3b - 5a)$;

3) $9a - (3a + 5b) - 4b$;

2) $8a - (3a - 2b) - 5b$;

4) $(7a - 2b) - (3a + 4b)$.

2. Решить уравнение:

1) $4x - 6 = 12 - x$;

3) $2\left(3 - \frac{x}{3}\right) = 5 + x$;

2) $\frac{7x}{9} = \frac{5+x}{4}$;

4) $\frac{5x-3}{2} - \frac{3-4x}{3} = \frac{2x+1}{4}$.

3. Разложить на множители:

1) $4a(x + y) - 5b(x + y)$;

3) $x(a - 2) + y(2 - a) + 5(2 - a)$;

2) $3a(x - y) - 4(y - x)$;

4) $c(p - q) + a(p - q) + d(q - p)$.

4. Упростить выражение:

1) $(2a + b)^2 - (3a - b)^2$;

3) $5(2 - a)^2 + 4(a - 5)^2$;

2) $(a + b)^2 - (a - b)^2$;

4) $(3a - y)^2 + (a - 3y)^2$.

5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{6y-x}{4} = 2, \\ \frac{x+13y}{2} = 4. \end{cases}$$

6. Решить неравенство:

1) $\frac{x+4}{2} - x \leq 2 - \frac{x}{2}$; 2) $3(2x - 1) + 3(x - 1) > 5(x + 2) + 2(2x - 3)$.

7. Решить систему неравенств:

$$1) \begin{cases} 2x + 5 \leq 0, \\ 9x - 18 \geq 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x-5}{4} \leq \frac{3x+1}{2}, \\ \frac{x+2}{8} \leq \frac{x+3}{5}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{8(x-1)}{2} - 1,5x \geq 0, 2x - 1,5, \\ \frac{x+3}{3} > \frac{x+5}{4}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x - 1 < 7x + 6, \\ 3x + 1 > 4x - 3, \\ 11x - 9 \leq 14x + 2. \end{cases}$$

8. Решить неравенство:

$$1) |3 - x| \leq \frac{2}{3}; \quad 2) |1 - x| \geq 1; \quad 3) |3x + 4| > 1; \quad 4) |5 - 4x| \leq 3.$$

9. Решить уравнение:

$$1) |x + 3| = |x - 3|;$$

$$3) |x + 6| = |x + 10|;$$

$$2) |1 - x| = |x + 2|;$$

$$4) |x + 5| = |x - 7|.$$

10. Вычислить:

$$1) \frac{3}{\sqrt{11}+3} + \frac{7}{\sqrt{11}-2};$$

$$3) \frac{7}{3+\sqrt{13}} - \frac{2}{2-\sqrt{13}};$$

$$2) \frac{4}{\sqrt{7}-1} - \frac{2}{\sqrt{7}+3} - 3\sqrt{7};$$

$$4) \frac{1}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{2-\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{4}.$$

11. Решить уравнение:

$$1) 3x^2 - 5x + 4 = 0;$$

$$3) \frac{x^2-3x}{7} + x = 11;$$

$$2) x^2 - 3x - 4 = 0;$$

$$4) 3x(x-2) - 1 = x - \frac{1}{2}(x^2 + 8).$$

12. Решить систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 46, \\ xy = 10; \end{cases}$$

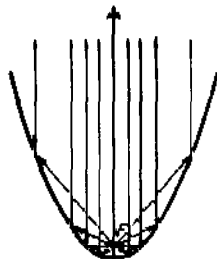
$$3) \begin{cases} x^2 - y + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 26; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

13. Среднее арифметическое двух чисел равно 20, а их среднее геометрическое 12. Найти эти числа.

Глава I КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ



§ 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

В 8-м классе вы познакомились с линейной функцией $y = kx + b$ и ее графиком.

В различных областях науки и техники часто встречаются функции, которые называют *квадратичными*. Приведем примеры.

1) Площадь квадрата y со стороной x вычисляется по формуле $y = x^2$.

2) Если тело брошено вверх со скоростью v , то расстояние s от него до поверхности земли в момент времени t определяется формулой $s = -\frac{gt^2}{2} + vt + s_0$, где s_0 — расстояние от тела до поверхности земли в момент времени $t = 0$.

В этих примерах рассмотрены функции вида $y = ax^2 + bx + c$. В первом примере $a = 1, b = c = 0$, а переменными являются x и y .

Во втором примере $a = -\frac{g}{2}, b = v, c = s_0$, а переменные обозначены буквами t и s .



Определение. Функция $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c заданные действительные числа, $a \neq 0, x$ — действительная переменная, называется *квадратичной функцией*.

Например, квадратичными являются функции:

$$y = x^2, \quad y = -2x^2, \quad y = x^2 - x,$$

$$y = x^2 - 5x + 6, \quad y = -3x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Задача 1. Найти значение функции $y(x) = x^2 - 5x + 6$ при $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$.

$$\Delta \quad y(-2) = (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6 = 20;$$

$$y(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6;$$

$$y(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0. \quad \blacktriangle$$

Задача 2. При каких значениях x квадратичная функция $y = x^2 + 4x - 5$ принимает значение, равное: 1) 7; 2) -9; 3) -8; 4) 0?

Δ 1) По условию $x^2 + 4x - 5 = 7$. Решая это уравнение, получаем:

$$x^2 + 4x - 12 = 0,$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 12} = -2 \pm 4, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -6.$$

Итак, $y(2) = 7$ и $y(-6) = 7$.

2) По условию $x^2 + 4x - 5 = -9$, откуда

$$x^2 + 4x + 4 = 0, \quad (x + 2)^2 = 0, \quad x = -2.$$

3) По условию $x^2 + 4x - 5 = -8$, откуда $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Решая это уравнение, находим $x_1 = -3$, $x_2 = -1$.

4) По условию $x^2 + 4x - 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -5. \quad \blacktriangle$

В последнем случае были найдены значения x , при которых функция $y = x^2 + 4x - 5$ принимает значение, равное 0, т. е. $y(1) = 0$ и $y(-5) = 0$. Такие значения x называют *нулями квадратичной функции*.

Задача 3. Найти нули функции $y = x^2 - 3x$.

Δ Решая уравнение $x^2 - 3x = 0$, находим $x_1 = 0$, $x_2 = 3. \quad \blacktriangle$

У п р а ж н е н и я

1, (Устно.) Является ли квадратичной функция:

1) $y = 2x^2 + x + 3$;

3) $y = 5x + 1$;

5) $y = 4x^2$;

2) $y = 3x^2 - 1$;

4) $y = x^3 + 7x - 1$;

6) $y = -3x^2 + 2x$?

2. Найти действительные значения x , при которых квадратичная функция $y = x^2 - x - 3$ принимает значение, равное:

1) -1;

2) -3;

3) $-\frac{13}{4}$;

4) -5.

3. При каких действительных значениях x квадратичная функция $y = -4x^2 + 3x - 1$ принимает значение, равное:
 1) -2 ; 2) -8 ; 3) $-0,5$; 4) -1 ?
4. Определить, какие из чисел -2 ; 0 ; 1 ; $\sqrt{3}$ являются нулями квадратичной функции:
 1) $y = x^2 + 2x$; 3) $y = x^2 - 3$;
 2) $y = x^2 + x$; 4) $y = 5x^2 - 4x - 1$.
5. Найти нули квадратичной функции:
 1) $y = x^2 - x$; 6) $y = 2x^2 - 7x + 9$;
 2) $y = x^2 + 3$; 7) $y = 8x^2 + 8x + 2$;
 3) $y = 12x^2 - 17x + 6$; 8) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$;
 4) $y = -6x^2 + 7x - 2$; 9) $y = 2x^2 + x - 1$;
 5) $y = 3x^2 - 5x + 8$; 10) $y = 3x^2 + 5x - 2$.
6. Найти коэффициенты p и q квадратичной функции $y = x^2 + px + q$, если известны нули x_1 и x_2 этой функции:
 1) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; 3) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$;
 2) $x_1 = -4$, $x_2 = 1$; 4) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.
7. Найти значения x , при которых функции $y = x^2 + 2x - 3$ и $y = 2x + 1$ принимают равные значения.

§ 2

ФУНКЦИЯ $y = x^2$

Рассмотрим функцию $y = x^2$, т. е. квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ при $a = 1$, $b = c = 0$. Для построения графика этой функции составим таблицу ее значений:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Построив указанные в таблице точки и соединив их плавной кривой, получим график функции $y = x^2$ (рис.1).

! Кривая, являющаяся графиком функции $y = x^2$, называется **параболой**.

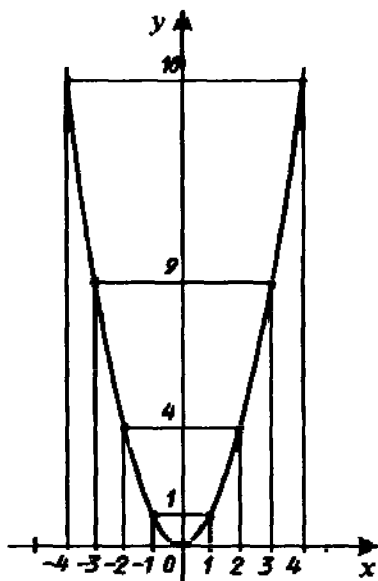


Рис. 1

Рассмотрим свойства функции $y = x^2$.

1) Значение функции $y = x^2$ положительно при $x \neq 0$ и равно нулю при $x = 0$. Следовательно, парабола $y = x^2$ проходит через начало координат, а остальные точки параболы лежат выше оси абсцисс. Говорят, что парабола $y = x^2$ касается оси абсцисс в точке $(0; 0)$.

2) График функции $y = x^2$ симметричен относительно оси ординат, так как $(-x)^2 = x^2$. Например, $y(-3) = y(3) = 9$ (рис. 1). Таким образом, ось ординат является осью симметрии параболы. Точку пересечения параболы с ее осью симметрии называют вершиной параболы. Для параболы $y = x^2$ вершиной является начало координат.

3) При $x \geq 0$ большему значению x соответствует большее значение y . Например, $y(3) > y(2)$. Говорят, что функция $y = x^2$ является возрастающей на промежутке $x \geq 0$ (рис. 1).

При $x \leq 0$ большему значению x соответствует меньшее значение y . Например, $y(-2) < y(-4)$. Говорят, что функция $y = x^2$ является убывающей на промежутке $x \leq 0$ (рис. 1).

Задача. Найти координаты точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = x + 6$.

Δ Координаты точки пересечения являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 6. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x^2 = x + 6$, т. е. $x^2 - x - 6 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Подставляя значения x_1 и x_2 в одно из уравнений системы, находим $y_1 = 9$, $y_2 = 4$.

Ответ: $(3; 9)$, $(-2; 4)$. **▲**

Парабола обладает многими интересными свойствами, которые широко используются в технике. Например, на оси симметрии параболы есть точка F , которую называют *фокусом параболы* (рис. 2).

Если в этой точке находится источник света, то все отраженные от параболы лучи идут параллельно. Это свойство используется при изготовлении прожекторов, локаторов и других приборов.

Фокусом параболы $y = x^2$ является точка $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

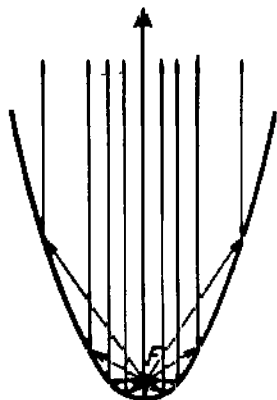


Рис. 2

У п р а ж н е н и я

8. На миллиметровой бумаге построить график функции $y = x^2$. По графику приближенно найти:
 - 1) значение y при $x = 0,8$; $x = 1,5$; $x = 1,9$; $x = -2,3$; $x = -1,5$;
 - 2) значения x , если $y = 2$; $y = 3$; $y = 4,5$; $y = 6,5$.
9. Не строя графика функции $y = x^2$, определить, какие из точек принадлежат ему: $A(2; 6)$, $B(-1; 1)$, $C(12; 144)$, $D(-3; -9)$.
10. (Устно.) Найти координаты точек, симметричных точкам $A(3; 9)$, $B(-5; 25)$, $C(4; 15)$, $D(\sqrt{3}; 3)$ относительно оси ординат. Принадлежат ли все эти точки графику функции $y = x^2$?
11. (Устно.) Сравнить значения функции $y = x^2$ при:

1) $x = 2,5$ и $x = 3\frac{1}{3}$;	3) $x = -0,2$ и $x = -0,1$;
2) $x = 0,4$ и $x = 0,3$;	4) $x = 4,1$ и $x = -5,2$.
12. Найти координаты точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой:

1) $y = 25$;	3) $y = -x$;	5) $y = 3 - 2x$;
2) $y = 5$;	4) $y = 2x$;	6) $y = 2x - 1$.

13. Является ли точка A точкой пересечения параболы $y = x^2$ и прямой:

1) $y = -x - 6$, если $A(-3; 9)$;

2) $y = 5x - 6$, если $A(2; 4)$?

14. Верно ли утверждение, что функция $y = x^2$ возрастает:

1) на отрезке $[1; 4]$;

3) на промежутке $x > 3$;

2) на интервале $(2; 5)$;

4) на отрезке $[-3; 4]$?

15. На одной координатной плоскости построить параболу $y = x^2$ и прямую $y = 3$. При каких значениях x точки параболы лежат выше прямой? ниже прямой?

16. При каких x значения функции $y = x^2$:

1) больше 9;

3) не меньше 16;

2) не больше 25;

4) меньше 36?

§ 3

ФУНКЦИЯ $y = ax^2$

Задача 1. Построить график функции $y = 2x^2$.

△ Составим таблицу значений функции $y = 2x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

Построим найденные точки и проведем через них плавную кривую (рис. 3). ▲

Сравним графики функций $y = 2x^2$ и $y = x^2$ (рис. 3). При одном и том же x значение функции $y = 2x^2$ в 2 раза больше значения функции $y = x^2$. Это значит, что каждую точку графика функции $y = 2x^2$ можно получить из точки графика функции $y = x^2$ с той же абсциссой увеличением ее ординаты в 2 раза.

Говорят, что график функции $y = 2x^2$ получается *растяжением* графика функции $y = x^2$ от оси Ox вдоль оси Oy в 2 раза.

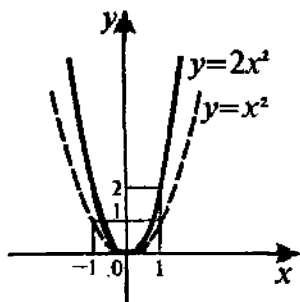


Рис. 3

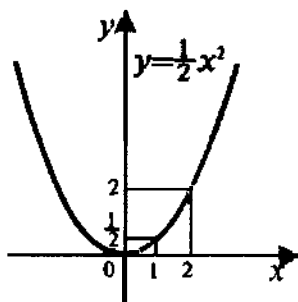


Рис. 4

Задача 2. Построить график функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

Δ Составим таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2}x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Построив найденные точки, проведем через них плавную кривую (рис. 4). $\blacktriangle$

Сравним графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = x^2$. Каждую точку графика $y = \frac{1}{2}x^2$ можно получить из точки графика функции $y = x^2$ с той же абсциссой уменьшением ее ординаты в 2 раза.

Говорят, что график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ получается *сжатием графика функции $y = x^2$ к оси Ox вдоль оси Oy в 2 раза.*

Задача 3. Построить график функции $y = -x^2$.

Δ Сравним функции $y = -x^2$ и $y = x^2$. При одном и том же x значения этих функций равны по модулю и противоположны по знаку. Следовательно, график функции $y = -x^2$ можно получить симметрией относительно оси Ox графика функции $y = x^2$ (рис. 5). $\blacktriangle$

Аналогично график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ симметричен графику функции $y = \frac{1}{2}x^2$ относительно оси Ox (рис. 6).



График функции $y = ax^2$ при любом $a \neq 0$ также называют **параболой**. При $a > 0$ ветви параболы направлены **вверх**, а при $a < 0$ — **вниз**.

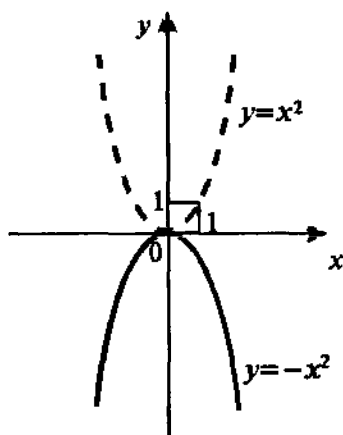


Рис. 5

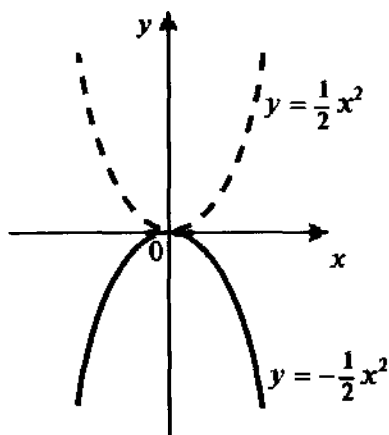


Рис. 6

Заметим, что фокус параболы $y = ax^2$ находится в точке $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$.

Перечислим основные свойства функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$.

1) Если $a > 0$, то функция $y = ax^2$ принимает положительные значения при $x \neq 0$; если $a < 0$, то функция $y = ax^2$ принимает отрицательные значения при $x \neq 0$; значение функции $y = ax^2$ равно 0 только при $x = 0$.

2) Парабола $y = ax^2$ симметрична относительно оси ординат.

3) Если $a > 0$, то функция $y = ax^2$ возрастает при $x \geq 0$ и убывает при $x \leq 0$;

Если $a < 0$, то функция $y = ax^2$ убывает при $x \geq 0$ и возрастает при $x \leq 0$.

Все эти свойства видны на графике (рис. 7 и 8).

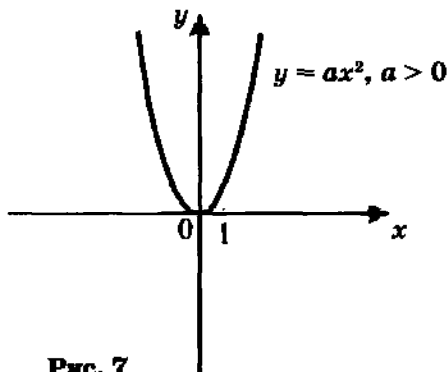


Рис. 7

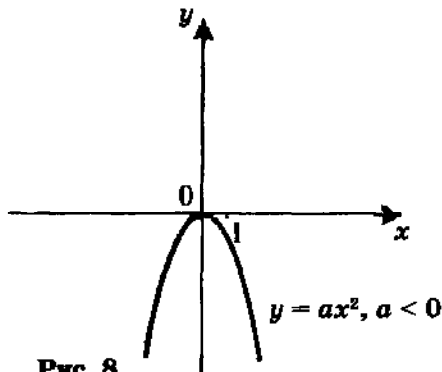


Рис. 8

17. На миллиметровой бумаге построить график функции $y = 3x^2$. По графику приближенно найти:

- 1) значения y при $x = -2,8; -1,2; 1,5; 2,5$;
- 2) значения x , если $y = 9; 6; 2; 8; 1,3$.

18. (Устно.) Определить направления ветвей параболы:

- 1) $y = 3x^2$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2$; 3) $y = -4x^2$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

19. На одной координатной плоскости построить графики функций:

- 1) $y = x^2$ и $y = 3x^2$; 3) $y = 3x^2$ и $y = -3x^2$;
- 2) $y = -x^2$ и $y = -3x^2$; 4) $y = \frac{1}{3}x^2$ и $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Используя графики, выяснить, какие из этих функций возрастают на промежутке $x \geq 0$.

20. Найти координаты точек пересечения графиков функций:

- 1) $y = 2x^2$ и $y = 3x + 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x - 3$.

21. Является ли убывающей на промежутке $x \leq 0$ функция:

- 1) $y = 4x^2$; 2) $y = \frac{1}{4}x^2$; 3) $y = -5x^2$; 4) $y = -\frac{1}{5}x^2$?

22. Выяснить, является ли функция $y = -2x^2$ возрастающей или убывающей:

- 1) на отрезке $[-4; -2]$; 3) на интервале $(3; 5)$;
- 2) на отрезке $[-5; 0]$; 4) на интервале $(-3; 2)$.

23. Путь, пройденный телом при равноускоренном движении, вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$, где s — путь в метрах; a — ускорение в м/с^2 ; t — время в секундах. Найти ускорение a , если за 8 сек. тело прошло путь, равный 96 м.

Задача 1. Построить график функции $y = x^2 - 2x + 3$ и сравнить его с графиком функции $y = x^2$.

Δ Составим таблицу значений функции $y = x^2 - 2x + 3$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2 - 2x + 3$	18	11	6	3	2	3	6

Построим найденные точки и проведем через них плавную кривую (рис. 9).

Для сравнения графиков преобразуем формулу $y = x^2 - 2x + 3$, используя метод выделения полного квадрата:

$$y = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

Сначала сравним графики функций $y = x^2$ и $y = (x - 1)^2$. Заметим, что если $(x_1; y_1)$ — точка параболы $y = x^2$, т. е. $y_1 = x_1^2$, то точка $(x_1 + 1; y_1)$ принадлежит графику функции $y = (x - 1)^2$, так как $((x_1 + 1) - 1)^2 = x_1^2 = y_1$. Следовательно, графиком функции $y = (x - 1)^2$ является парабола, полученная из параболы $y = x^2$ *сдвигом* (параллельным переносом) вправо на единицу (рис. 10).

Теперь сравним графики функций $y = (x - 1)^2$ и $y = (x - 1)^2 + 2$. При каждом x значение функции $y = (x - 1)^2 + 2$ больше значения

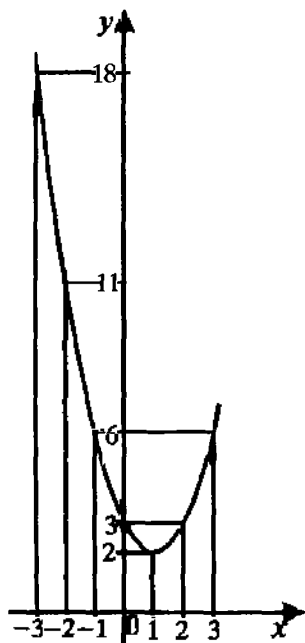


Рис. 9

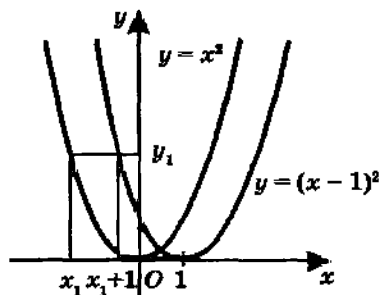


Рис. 10

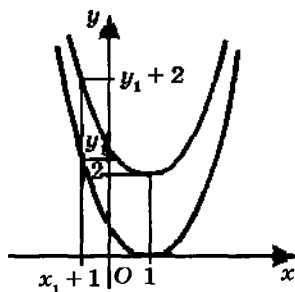


Рис. 11

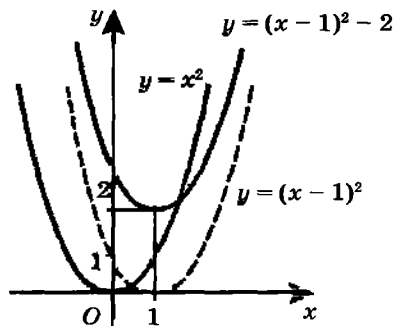


Рис. 12

ния функции $y = (x - 1)^2$ на 2. Следовательно, графиком функции $y = (x - 1)^2 + 2$ является параболa, полученная сдвигом параболы $y = (x - 1)^2$ вверх на две единицы (рис. 11).

Итак, графиком функции $y = x^2 - 2x + 3$ является параболa, получаемая сдвигом параболы $y = x^2$ на единицу вправо и на две единицы вверх (рис. 12). Осью симметрии параболы $y = x^2 - 2x + 3$ является прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы — точку (1; 2). ▲

Аналогично доказывается, что графиком функции $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ является параболa, получаемая сдвигом параболы $y = ax^2$:

вдоль оси абсцисс вправо на x_0 , если $x_0 > 0$, влево на $|x_0|$, если $x_0 < 0$;
вдоль оси ординат вверх на y_0 , если $y_0 > 0$, вниз на $|y_0|$, если $y_0 < 0$.

Любую квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ с помощью выделения полного квадрата можно записать в виде

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

т. е. в виде $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Таким образом, графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является параболa, получаемая сдвигом параболы $y = ax^2$ вдоль координатных осей. Равенство $y = ax^2 + bx + c$ называют *уравнением параболы*. Координаты (x_0, y_0) вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ можно найти по формулам

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = y(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

Ось симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$ — прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы. Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх, если $a > 0$, и направлены вниз, если $a < 0$.

Задача 2. Найти координаты вершины параболы

$$y = 2x^2 - x - 3.$$

△ Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$.

Ордината вершины параболы

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1 + 24}{8} = -3\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; -3\frac{1}{8}\right)$. ▲

Задача 3. Записать уравнение параболы, если известно, что она проходит через точку $(-2; 5)$, а ее вершиной является точка $(-1; 2)$.

△ Так как вершиной параболы является точка $(-1; 2)$, то уравнение параболы можно записать в виде

$$y = a(x + 1)^2 + 2.$$

По условию точка $(-2; 5)$ принадлежит параболы, и, следовательно,

$$5 = a(-2 + 1)^2 + 2,$$

откуда $a = 3$.

Таким образом, парабола задается уравнением

$$y = 3(x + 1)^2 + 2, \text{ или } y = 3x^2 + 6x + 5. \quad \blacktriangle$$

У п р а ж н е н и я

Найти координаты вершины параболы (24–26).

24. (Устно.)

1) $y = (x - 3)^2 - 2$;

3) $y = 5(x + 2)^2 - 7$;

2) $y = (x + 4)^2 + 3$;

4) $y = -4(x - 1)^2 + 5$.

25. 1) $y = x^2 + 4x + 1$;

3) $y = 2x^2 - 6x + 11$;

2) $y = x^2 - 6x - 7$;

4) $y = -3x^2 + 18x - 7$.

26. 1) $y = x^2 + 2$; 3) $y = 3x^2 + 2x$;

2) $y = -x^2 - 5$; 4) $y = -4x^2 + x$.

27. Найти на оси Ox точку, через которую проходит ось симметрии параболы:

1) $y = x^2 + 3$; 4) $y = (x - 2)^2 + 2$;

2) $y = (x + 2)^2$; 5) $y = x^2 + x + 1$;

3) $y = -3(x + 2)^2 + 2$; 6) $y = 2x^2 - 3x + 5$.

28. Проходит ли ось симметрии параболы $y = x^2 - 10x$ через точку:

1) (5; 10); 2) (3; -8); 3) (5; 0); 4) (-5; 1)?

29. Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:

1) $y = x^2 - 3x + 2$; 3) $y = 3x^2 - 7x + 12$;

2) $y = -2x^2 + 3x - 1$; 4) $y = 3x^2 - 4x$.

30. Написать уравнение параболы, если известно, что парабола проходит через точку $(-1; 6)$, а ее вершиной является точка $(1; 2)$.

31. (Устно.) Принадлежит ли точка $(1; -6)$ параболе $y = -3x^2 + 4x - 7$?

32. Найти значение k , если точка $(-1; 2)$ принадлежит параболы:

1) $y = kx^2 + 3x - 4$; 2) $y = -2x^2 + kx - 6$.

33. С помощью шаблона параболы $y = x^2$ построить график функции:

1) $y = (x + 2)^2$; 3) $y = x^2 - 2$; 5) $y = -(x - 1)^2 - 3$;

2) $y = (x - 3)^2$; 4) $y = -x^2 + 1$; 6) $y = (x + 2)^2 + 1$.

34. Записать уравнение параболы, полученной из параболы $y = 2x^2$:

- 1) сдвигом вдоль оси Ox на 3 единицы вправо;
- 2) сдвигом вдоль оси Oy на 4 единицы вверх;
- 3) сдвигом вдоль оси Ox на 2 единицы влево и вдоль оси Oy на единицу вниз;
- 4) сдвигом вдоль оси Ox на 1,5 единицы вправо и вдоль оси Oy на 3,5 единицы вверх.

§ 5

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Задача 1. Построить график функции $y = x^2 - 4x + 3$.

Δ 1. Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2,$$

$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$$

Построим точку $(2; -1)$.

2. Проведем через точку $(2; -1)$ прямую, параллельную оси ординат, — ось симметрии параболы (рис. 13, а).

3. Решая уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$, найдем нули функции: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Построим точки $(1; 0)$ и $(3; 0)$ (рис.13, б).

4. Возьмем две точки на оси Ox , симметричные относительно точки $x = 2$, например, $x = 0$ и $x = 4$. Вычислим значения функции в этих точках: $y(0) = y(4) = 3$. Построим точки $(0; 3)$ и $(4; 3)$.

5. Проведем параболу через построенные точки (рис.13, в). ▲

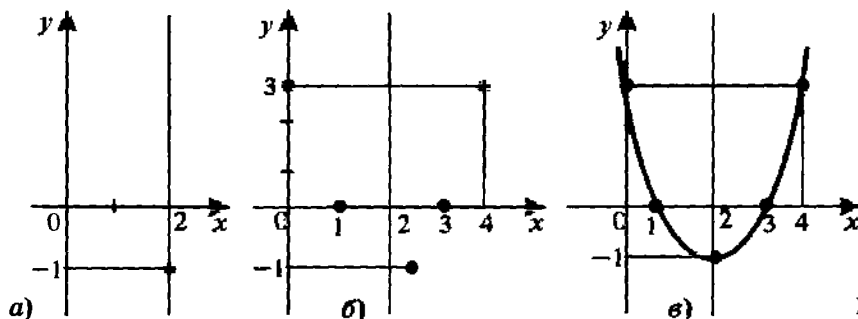


Рис. 13

По такой же схеме можно *построить график любой квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$:

1. Построить вершину параболы (x_0, y_0) , вычислив x_0, y_0 по формулам $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.

2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси ординат, — ось симметрии параболы.

3. Найти нули функции, если они есть, и построить на оси абсцисс соответствующие точки параболы.

4. Построить две какие-нибудь точки параболы, симметричные относительно ее оси. Для этого надо взять две точки на оси Ox , симметричные относительно точки x_0 , и вычислить соответствующие значения функции (эти значения одинаковы). Например, можно построить точки параболы с абсциссами $x = 0$ и $x = 2x_0$, если $x_0 \neq 0$ (ординаты этих точек равны c).

5. Провести через построенные точки параболу.

Заметим, что для более точного построения графика полезно найти еще несколько точек параболы.

Задача 2. Построить график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$.

Δ 1. Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{12}{-4} = 3, \quad y_0 = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

Построим точку $(3; -1)$ — вершину параболы (рис. 14).

2. Проведем через точку $(3; -1)$ ось симметрии параболы (рис. 14).

3. Решая уравнение $-2x^2 + 12x - 19 = 0$, убеждаемся в том, что уравнение не имеет действительных корней, и, следовательно, парабола не пересекает ось Ox .

4. На оси Ox возьмем две точки, симметричные относительно точки $x = 3$, например точки $x = 2$ и $x = 4$. Вычислим значение функции в этих точках: $y(2) = y(4) = -3$. Построим точки $(2; -3)$ и $(4; -3)$ (рис. 14).

5. Проведем параболу через найденные точки (рис. 15). ▲

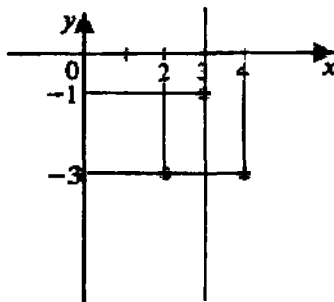


Рис. 14

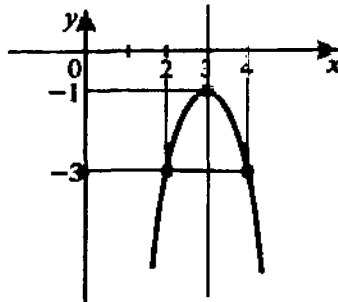


Рис. 15

Задача 3. Построить график функции $y = -x^2 + x + 6$ и выяснить, какими свойствами обладает эта функция.

△ Для построения графика найдем нули функции:

$$-x^2 + x + 6 = 0,$$

откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

Координаты вершины параболы можно найти так:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_0 = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1 + 2 + 24}{4} = 6\frac{1}{4}.$$

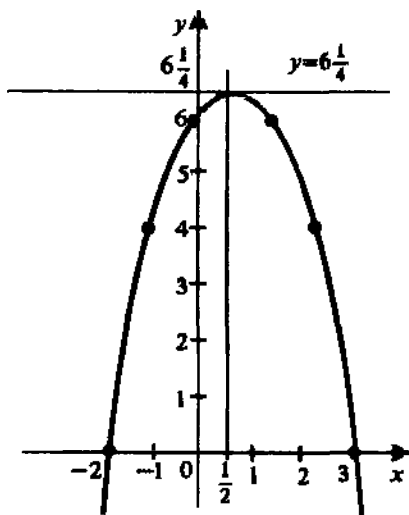


Рис. 16

Так как $a = -1 < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Найдем еще несколько точек параболы: $y(-1) = 4$, $y(0) = 6$, $y(1) = 6$, $y(2) = 4$.

Строим параболу (рис. 16).

С помощью графика получим следующие свойства функции

$$y = -x^2 + x + 6:$$

1) при любых значениях x значения функции меньше или равны $6\frac{1}{4}$;

2) значения функции положительны при $-2 < x < 3$, отрицательны при $x < -2$ и $x > 3$, равны нулю при $x = -2$ и $x = 3$;

3) функция возрастает на промежутке $x \leq \frac{1}{2}$, убывает на промежутке $x \geq \frac{1}{2}$;

4) при $x = \frac{1}{2}$ функция принимает наибольшее значение, равное $6\frac{1}{4}$;

5) график функции симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$. ▲

Отметим, что функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает *наименьшее* или *наибольшее значение* в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$, которое является абсциссой вершины параболы.

Значение функции в точке x_0 можно найти по формуле

$$y_0 = y(x_0).$$

Если $a > 0$, то функция имеет наименьшее значение, а если $a < 0$, то функция имеет наибольшее значение.

Например, функция $y = x^2 - 4x + 3$ при $x = 2$ принимает наименьшее значение, равное -1 (рис. 13, в); функция $y = -2x^2 + 12x - 9$ при $x = 3$ принимает наибольшее значение, равное -1 (рис. 15).

Задача 4. Сумма двух положительных чисел равна 6. Найти эти числа, если сумма их квадратов наименьшая. Каково наименьшее значение суммы квадратов этих чисел?

△ Обозначим первое число буквой x , тогда второе число равно $6 - x$, а сумма их квадратов равна $x^2 + (6 - x)^2$. Преобразуем это выражение:

$$x^2 + (6 - x)^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2 = 2x^2 - 12x + 36.$$

Задача свелась к нахождению наименьшего значения функции $y = 2x^2 - 12x + 36$. Найдем координаты вершины этой параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3, \quad y_0 = y(3) = 2 \cdot 9 - 12 \cdot 3 + 36 = 18.$$

Итак, при $x = 3$ функция принимает наименьшее значение, равное 18. Таким образом, первое число равно 3, второе также равно 3. Значение суммы квадратов этих чисел равно 18. ▲

35. Найти координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 - 4x - 5$;

3) $y = -x^2 - 2x + 5$;

2) $y = x^2 + 3x + 5$;

4) $y = -x^2 + 5x - 1$.

36. Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:

1) $y = x^2 - 3x + 5$;

3) $y = -2x^2 + 6$;

2) $y = -2x^2 - 8x + 10$;

4) $y = 7x^2 + 14$.

Построить график функции и по графику:

1) найти значения x , при которых значения функции положительны; отрицательны;

2) найти промежутки убывания и возрастания функции;

3) выяснить, при каком значении x функция принимает наибольшее или наименьшее значение (37–38).

37. 1) $y = x^2 - 7x + 10$;

3) $y = -x^2 + 6x - 9$;

2) $y = -x^2 + x + 2$;

4) $y = x^2 + 4x + 5$.

38. 1) $y = 4x^2 + 4x - 3$;

5) $y = 4x^2 + 12x + 9$;

2) $y = -3x^2 - 2x + 1$;

6) $y = -4x^2 + 4x - 1$;

3) $y = -2x^2 + 3x + 2$;

7) $y = 2x^2 - 4x + 5$;

4) $y = 3x^2 - 8x + 4$;

8) $y = -3x^2 - 6x - 4$.

39. По данному графику квадратичной функции (рис. 17) выяснить ее свойства.

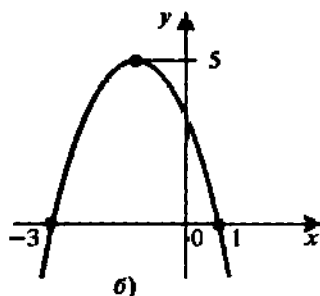
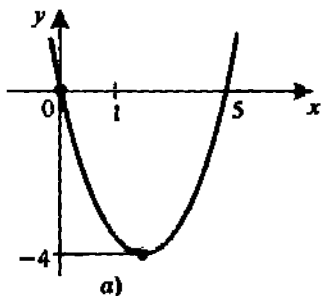


Рис. 17

40. Число 15 представить в виде суммы двух чисел так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим.

41. Сумма двух чисел равна 10. Найти эти числа, если сумма их кубов является наименьшей.

42. Участок прямоугольной формы, примыкающий к стене дома, требуется огородить с трех сторон забором длиной 12 м. Какими должны быть размеры участка, чтобы площадь его была наибольшей?

43. В треугольнике сумма основания и высоты, опущенной на это основание, равна 14 см. Может ли такой треугольник иметь площадь, равную 25 см^2 ?

44. Не строя график, определить, при каком значении x квадратичная функция имеет наибольшее (наименьшее значение); найти это значение:

1) $y = x^2 - 6x + 13$;

3) $y = -x^2 + 4x + 3$;

2) $y = x^2 - 2x - 4$;

4) $y = 3x^2 - 6x + 1$.

45. Определить знаки коэффициентов уравнения параболы $y = ax^2 + bx + c$, если:

1) ветви параболы направлены вверх, абсцисса ее вершины отрицательна, а ордината положительна;

2) ветви параболы направлены вниз, абсцисса и ордината ее вершины отрицательны.

46. С высоты 5 м вертикально вверх из лука выпущена стрела с начальной скоростью 50 м/с. Высота h м, на которой находится стрела через t секунд, вычисляется по формуле

$$h = h(t) = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}, \text{ где } g \approx 10 \text{ м/с}^2. \text{ Через сколько секунд стрела:}$$

1) достигнет наибольшей высоты и какой;

2) упадет на землю?

47. Найти значения x , при которых квадратичная функция $y = 2x^2 - 5x + 3$ принимает значение, равное:

- 1) 0; 2) 1; 3) 10; 4) -1.

48. Найти координаты точек пересечения графиков функций:

- 1) $y = x^2 - 4$ и $y = 2x - 4$;
2) $y = x^2$ и $y = 3x - 2$;
3) $y = x^2 - 2x - 5$ и $y = 2x^2 + 3x + 1$;
4) $y = x^2 + x - 2$ и $y = (x + 3)(x - 4)$.

49. Решить неравенство:

- 1) $x^2 \leq 5$; 2) $x^2 > 36$.

50. Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:

- 1) $y = x^2 + x - 12$; 5) $y = 5x^2 + x - 1$;
2) $y = -x^2 + 3x + 10$; 6) $y = 5x^2 + 3x - 2$;
3) $y = -8x^2 - 2x + 1$; 7) $y = 4x^2 - 11x + 6$;
4) $y = 7x^2 + 4x - 11$; 8) $y = 3x^2 + 13x - 10$.

51. Найти координаты вершины параболы:

- 1) $y = x^2 - 4x - 5$; 4) $y = x^2 + x + \frac{5}{4}$;
2) $y = -x^2 - 2x + 3$; 5) $y = -2x(x + 2)$;
3) $y = x^2 - 6x + 10$; 6) $y = (x - 2)(x + 3)$.

52. Построить график функции и по графику выяснить ее свойства:

- 1) $y = x^2 - 5x + 6$; 4) $y = 2x^2 - 5x + 2$;
2) $y = x^2 + 10x + 30$; 5) $y = -3x^2 - 3x + 1$;
3) $y = -x^2 - 6x - 8$; 6) $y = -2x^2 - 3x - 3$.

Проверьте себя!

1. Построить график функции $y = x^2 - 6x + 5$ и найти ее наименьшее значение.
2. С помощью графика функции $y = -x^2 + 2x + 3$ найти значения x , при которых значение функции равно 3.
3. По графику функции $y = 1 - x^2$ найти значения x , при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения.
4. На каких промежутках функция $y = 2x^2$ возрастает? убывает? Построить график этой функции.
5. Найти координаты вершины параболы $y = (x - 3)^2$ и построить ее график.

53. Не строя график функции, найти ее наибольшее или наименьшее значение:

1) $y = x^2 + 2x + 3$;

3) $y = -3x^2 + 7x$;

2) $y = -x^2 + 2x + 3$;

4) $y = 3x^2 + 4x + 5$.

54. Периметр прямоугольника 600 м. Какими должны быть его высота и основание, чтобы площадь прямоугольника была наибольшей?

55. Прямоугольник разбит на 3 части двумя отрезками, параллельными одной из его сторон. Сумма периметра прямоугольника и длин отрезков равна 1600 м. Найти стороны прямоугольника, если его площадь наибольшая.

56. Найти коэффициенты p и q квадратичной функции $y = x^2 + px + q$, если эта функция:

1) при $x = 0$ принимает значение 2, а при $x = 1$ — значение 3;

2) при $x = 0$ принимает значение 0, а при $x = 2$ — значение 6.

57. Найти p и q , если парабола $y = x^2 + px + q$:

- 1) пересекает ось абсцисс в точках $x = 2$ и $x = 3$;
- 2) пересекает ось абсцисс в точке $x = 1$ и ось ординат в точке $y = 3$;
- 3) касается оси абсцисс в точке $x = 2$.

58. При каких значениях x принимают равные значения функции:

- 1) $y = x^2 + 3x + 2$ и $y = |7 - x|$;
- 2) $y = 3x^2 - 6x + 3$ и $y = |3x - 3|$?

59. Построить параболу $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что:

- 1) парабола проходит через точки с координатами $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(3; 3)$;
- 2) точка $(1; 3)$ является вершиной параболы, а точка $(-1; 7)$ принадлежит параболе;
- 3) нулями функции $y = ax^2 + bx + c$ являются числа $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, а наибольшее значение равно 2.

2 ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Найти значение a , для которого одна из точек пересечения параболы $y = ax^2$ с прямой $y = 5x + 1$ имеет абсциссу $x = 1$.
А) $a = 6$; В) $a = -6$; С) $a = 4$; D) $a = -4$; Е) $a = 7$.
2. Найти значение k , для которого одна из точек пересечения параболы $y = -x^2$ с прямой $y = kx - 6$ имеет абсциссу $x = 2$.
А) $k = -1$; В) $k = 1$; С) $k = 2$; D) $k = -2$; Е) $k = -6$.
3. Найти значение b , для которого одна из точек пересечения параболы $y = 3x^2$ с прямой $y = 2x + b$ имеет абсциссу $x = 1$.
А) $b = 2$; В) $b = -1$; С) $b = 1$; D) $b = -2$; Е) $b = 3$.

Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат (4–7).

4. $y = x^2 - 2x + 4$.
А) $(-1; 3)$; В) $(3; 1)$; С) $(1; 3)$; D) $(0; 4)$; Е) $(4; 0)$.

5. $y = -x^2 - 4x - 5$.

- A) $(-1; 2)$; B) $(2; -1)$; C) $(5; 0)$; D) $(-5; 0)$; E) $(0; -5)$.

6. $y = 6x^2 - 5x + 1$.

- A) $(\frac{1}{3}; 0), (\frac{1}{2}; 0), (0; 1)$; D) $(\frac{1}{3}; 0), (\frac{1}{2}; 0), (0; 1)$;

- B) $(-\frac{1}{3}; 0), (-\frac{1}{2}; 0), (1; 0)$;

E) правильный ответ не приведен.

- C) $(0; \frac{1}{3}), (0; \frac{1}{2}), (0; 1)$;

7. $y = -x^2 + 6x + 7$.

- A) $(-1; 0), (-7; 0), (0; -7)$;

- D) $(-1; 2), (7; -1), (7; 0)$;

- B) $(-1; 0), (7; 0), (1; 7)$;

- E) $(3; 16)$.

- C) $(1; 0), (7; 0), (0; -7)$;

Найти координаты вершины параболы (8–11).

8. $y = x^2 - 4x$.

- A) $(0; 4)$; B) $(4; 2)$; C) $(2; -4)$; D) $(-4; 2)$; E) $(0; -4)$.

9. $y = -x^2 + 2x$.

- A) $(-1; -1)$; B) $(1; -2)$; C) $(0; 2)$; D) $(1; 1)$; E) $(1; -1)$.

10. $y = x^2 + 6x + 5$.

- A) $(3; -4)$; B) $(-5; -1)$; C) $(-1; -5)$; D) $(3; 4)$; E) $(-3; -4)$.

11. $y = -5x^2 + 4x + 1$.

- A) $(\frac{2}{5}; \frac{9}{5})$; B) $(-\frac{2}{5}; \frac{9}{5})$; C) $(-\frac{9}{5}; \frac{2}{5})$; D) $(2; 9)$; E) $(9; 5)$.

12. Написать уравнение параболы, которая пересекает ось абсцисс в точках с абсциссами $x = 1$ и $x = 2$, а ось ординат в точке с ординатой $y = \frac{1}{2}$.

- A) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; C) $y = x^2 - 3x + 2$; E) правильный ответ не приведен.
 B) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; D) $y = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$;

13. Написать уравнение параболы, которая пересекает ось абсцисс в точках с абсциссами $x = -1$ и $x = 3$, а ось ординат в точке с ординатой $y = 1$.

- A) $y = -x^2 + 2x + 3$; C) $y = -\frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}x + 1$; E) правильный ответ не приведен.
 B) $y = -\frac{x^2}{3} + 2x + 1$; D) $y = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x - 1$;

В каких квадрантах расположена парабола (14–18)?

14. $y = 3x^2 + 5x - 2$.

- A) I, II, III; C) I, III, IV; E) I, II, IV.
 B) II, III, IV; D) I, II, III, IV;

15. $y = x^2 - 4x + 6$.

- A) I, IV; B) II, III; C) I, II, III, IV; D) II, III, IV; E) I, II.

16. $y = -x^2 - 6x - 11$.

- A) III, IV; B) I, II, III; C) II, III, IV; D) I, III, IV; E) I, II.

17. $y = -x^2 + 5x$.

- A) I, II, III; C) I, II, III, IV; E) правильный ответ не приведен.
 B) I, III, IV; D) II, III, IV;

18. $y = x^2 - 4x$.

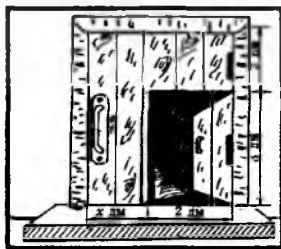
- A) I, II, III; B) II, III, IV; C) I, II, IV; D) III, IV; E) I, II.

19. Сумма двух положительных чисел равна 160. Найти эти числа, если сумма их кубов имеет наименьшее значение.

- A) 95; 65; B) 155; 5; C) 75; 85; D) 80; 80; E) 90; 70.

20. Сумма двух положительных чисел равна a . Найти эти числа, если сумма их квадратов имеет наименьшее значение.

- A) $\frac{2a}{5}, \frac{3a}{5}$; B) $a^3, a^3 - a$; C) $\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}$; D) $a^2, a - a^2$; E) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$.



§ 6

КВАДРАТНОЕ НЕРАВЕНСТВО И ЕГО РЕШЕНИЕ

Задача 1. Стороны прямоугольника равны 2 дм и 3 дм. Каждую сторону увеличили на одинаковое число дециметров так, что площадь прямоугольника стала больше 12 дм². Как изменилась каждая сторона?

△ Пусть каждая сторона прямоугольника увеличена на x дециметров. Тогда стороны нового прямоугольника равны $(2 + x)$ и $(3 + x)$ дециметрам, а его площадь равна $(2 + x)(3 + x)$ квадратным дециметрам. По условию задачи $(2 + x)(3 + x) > 12$, откуда $x^2 + 5x + 6 > 12$, или $x^2 + 5x - 6 > 0$.

Разложим левую часть этого неравенства на множители:

$$(x + 6)(x - 1) > 0.$$

Так как по условию задачи $x > 0$, то $x + 6 > 0$. Поделив обе части неравенства на положительное число $x + 6$, получим $x - 1 > 0$, т. е. $x > 1$.

Ответ: каждую сторону прямоугольника увеличили больше чем на 1 дм. ▲

В неравенстве $x^2 + 5x - 6 > 0$ буквой x обозначено неизвестное число. Это пример квадратного неравенства.



Если в левой части неравенства стоит квадратный трехчлен, а в правой — нуль, то такое *неравенство* называют *квадратным*.

Например, неравенства $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$, $-3x^2 + 4x + 5 < 0$ являются квадратными.

Напомним, что *решением неравенства* с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство. *Решить неравенство* — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Задача 2. Решить неравенство $x^2 - 5x + 6 > 0$.

△ Квадратное уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ имеет два различных корня $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Следовательно, квадратный трехчлен $x^2 - 5x + 6$ можно разложить на множители:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Поэтому данное неравенство можно записать так:

$$(x - 2)(x - 3) > 0.$$

Произведение двух множителей положительно, если они имеют одинаковые знаки.

1) Рассмотрим случай, когда оба множителя положительны, т. е. $x - 2 > 0$ и $x - 3 > 0$.

Эти два неравенства образуют систему:

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 3 > 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $\begin{cases} x > 2, \\ x > 3, \end{cases}$ откуда $x > 3$. Итак, все числа $x > 3$ являются решениями неравенства $(x - 2)(x - 3) > 0$.

2) Рассмотрим теперь случай, когда оба множителя отрицательны, т. е. $x - 2 < 0$ и $x - 3 < 0$.

Эти два неравенства образуют систему:

$$\begin{cases} x - 2 < 0, \\ x - 3 < 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $\begin{cases} x < 2, \\ x < 3, \end{cases}$ откуда $x < 2$. Итак, все числа $x < 2$ также являются решениями неравенства $(x - 2)(x - 3) > 0$.

Таким образом, решениями неравенства $(x - 2)(x - 3) > 0$, а значит, и исходного неравенства $x^2 - 5x + 6 > 0$ являются числа $x < 2$, а также числа $x > 3$.

Ответ: $x < 2$ или $x > 3$. ▲



Вообще, если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня, то решение квадратного неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$ можно свести к решению системы неравенств первой степени, разложив левую часть квадратного неравенства на множители.

Задача 3. Решить неравенство $-3x^2 - 5x + 2 > 0$.

Δ Чтобы удобнее проводить вычисления, представим данное неравенство в виде квадратного неравенства с положительным первым коэффициентом. Для этого умножим обе его части на -1 :

$$3x^2 + 5x - 2 < 0.$$

Найдем корни уравнения $3x^2 + 5x - 2 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6},$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -2.$$

Разложив квадратный трехчлен на множители, получим:

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) < 0.$$

Отсюда получаем две системы:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{3} > 0, \\ x + 2 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - \frac{1}{3} < 0, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

Первую систему можно записать так:

$$\begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ x < -2, \end{cases}$$

откуда видно, что она не имеет решений.

Решая вторую систему, находим: $\begin{cases} x < \frac{1}{3}, \\ x > -2, \end{cases}$

откуда $-2 < x < \frac{1}{3}$.

Отсюда следует, что решениями неравенства $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) < 0$, т. е. неравенства $-3x^2 - 5x + 2 > 0$, являются все числа интервала $\left(-2; \frac{1}{3}\right)$.

Ответ: $-2 < x < \frac{1}{3}$. ▲

У п р а ж н е н и я

60. (Устно.) Указать, какие из следующих неравенств являются квадратными:

- | | | |
|----------------------------|-------------------|-----------------------|
| 1) $x^2 - 4 > 0$; | 3) $3x + 4 > 0$; | 5) $x^2 - 1 \leq 0$; |
| 2) $x^2 - 3x - 5 \leq 0$; | 4) $4x - 5 < 0$; | 6) $x^4 - 16 > 0$. |

61. Свести к квадратным следующие неравенства:

- | | |
|---------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 < 3x + 4$; | 3) $3x^2 < x^2 - 5x + 6$; |
| 2) $3x^2 - 1 > x$; | 4) $2x(x + 1) < x + 5$. |

62. (Устно.) Какие из чисел 0; -1; 2 являются решениями неравенства:

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $x^2 + 3x + 2 > 0$; | 3) $x^2 - x - 2 \leq 0$; |
| 2) $-x^2 + 3,5x + 2 \geq 0$; | 4) $-x^2 + x + \frac{3}{4} < 0$? |

Решить неравенство (63–65).

- 63.** 1) $(x - 2)(x + 4) > 0$; 3) $(x - 3)(x + 5) < 0$;
2) $(x - 11)(x - 3) < 0$; 4) $(x + 7)(x + 1) > 0$.

- 64.** 1) $x^2 - 4 < 0$; 3) $x^2 + 3x < 0$;
2) $x^2 - 9 > 0$; 4) $x^2 - 2x > 0$.

- 65.** 1) $x^2 - 3x + 2 < 0$; 4) $x^2 + 2x - 3 > 0$;
2) $x^2 + x - 2 < 0$; 5) $2x^2 + 3x - 2 > 0$;
3) $x^2 - 2x - 3 > 0$; 6) $3x^2 + 2x - 1 > 0$.

66. Решить неравенство:

$$1) 2 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 > 0;$$

$$3) 3x^2 - 3 < x^2 - x;$$

$$2) 7 \cdot \left(\frac{1}{6} - x\right)^2 \leq 0;$$

$$4) (x - 1)(x + 3) > 5.$$

67. Построить график функции. По графику найти все значения x , при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения; значения, равные нулю:

$$1) y = 2x^2;$$

$$3) y = 2x^2 - x + 2;$$

$$2) y = -(x + 1,5)^2;$$

$$4) y = -3x^2 - x - 2.$$

68. Известно, что числа x_1 и x_2 , где $x_1 < x_2$, являются нулями функции $y = ax^2 + bx + c$. Доказать, что если число x_0 заключено между x_1 и x_2 , т. е. $x_1 < x_0 < x_2$, то выполняется неравенство $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$.

§ 7

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО НЕРАВЕНСТВА С ПОМОЩЬЮ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Напомним, что квадратичная функция задается формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Поэтому решение квадратного неравенства сводится к отысканию нулей квадратичной функции и промежутков, на которых квадратичная функция принимает положительные или отрицательные значения.

Задача 1. Решить с помощью графика неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq 0.$$

Δ График квадратичной функции $y = 2x^2 - x - 1$ — парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдем точки пересечения этой параболы с осью Ox . Для этого решим квадратное уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$. Корни этого уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

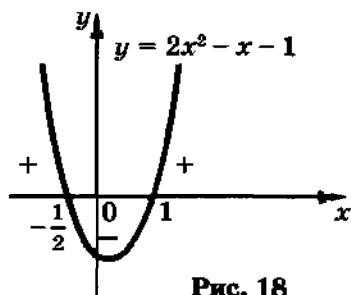


Рис. 18

Следовательно, парабола пересекает ось Ox в точках $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 1$ (рис. 18). Неравенству $2x^2 - x - 1 \leq 0$ удовлетворяют те значения x , при которых значения функции равны нулю или отрицательны, т. е. те значения x , при которых точки параболы лежат на оси Ox или ниже этой оси. Из рисунка 18 видно,

что этими значениями являются все числа из отрезка $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ответ: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. ▲

График этой функции можно использовать и при решении других неравенств, которые отличаются от данного только знаком неравенства. Из рисунка 18 видно, что:

- 1) решениями неравенства $2x^2 - x - 1 < 0$ являются числа интервала $-\frac{1}{2} < x < 1$;
- 2) решениями $2x^2 - x - 1 > 0$ являются все числа промежутков $x < -\frac{1}{2}$ и $x > 1$;
- 3) решениями $2x^2 - x - 1 \geq 0$ являются все числа промежутков $x \leq -\frac{1}{2}$ и $x \geq 1$.

Задача 2. Решить неравенство $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

△ Построим эскиз графика функции $y = 4x^2 + 4x + 1$. Ветви этой параболы направлены вверх. Уравнение $4x^2 + 4x + 1 = 0$ имеет один корень $x = -\frac{1}{2}$, поэтому парабола касается оси Ox в точке $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. График этой функции изображен на рисунке 19. Для решения данного неравенства нужно установить, при каких значениях x значения функции положительны. Таким образом, неравенству $4x^2 + 4x + 1 > 0$ удовлетворяют те значения x , при которых точки параболы лежат выше оси Ox . Из рисунка 19 видно, что такими являются все действительные числа x , кроме $x = -0,5$.

Ответ: $x \neq -0,5$. ▲

Из рисунка 19 видно также, что:

- 1) решениями неравенства $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$ являются все действительные числа;

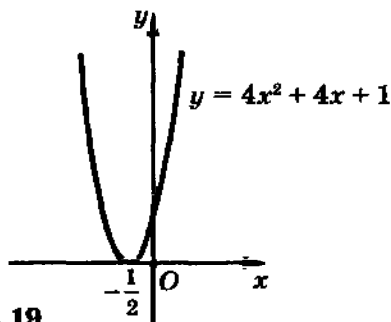


Рис. 19

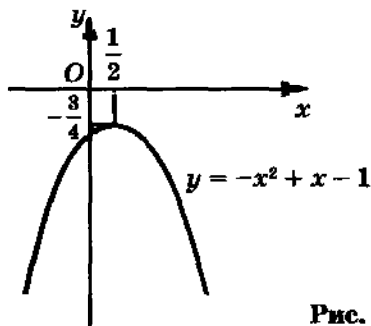


Рис. 20

2) неравенство $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$ имеет одно решение $x = -\frac{1}{2}$;

3) неравенство $4x^2 + 4x + 1 < 0$ не имеет решений.

Эти неравенства можно решить устно, если заметить, что

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

Задача 3. Решить неравенство $-x^2 + x - 1 < 0$.

Δ Построим эскиз графика функции $y = -x^2 + x - 1$. Ветви этой параболы направлены вниз. У уравнения $-x^2 + x - 1 = 0$ действительных корней нет, поэтому парабола не пересекает ось Ox . Следовательно, эта парабола расположена ниже оси Ox (рис. 20). Это означает, что значения квадратичной функции при всех x отрицательны, т. е. неравенство $-x^2 + x - 1 < 0$ выполняется при всех действительных значениях x . $\blacktriangle$

Из рисунка 20 видно также, что решениями неравенства $-x^2 + x - 1 \leq 0$ являются все действительные значения x , а неравенства $-x^2 + x - 1 > 0$ и $-x^2 + x - 1 \geq 0$ не имеют решений.

Итак, для решения квадратного неравенства с помощью графика нужно:

- 1) определить направление ветвей параболы по знаку первого коэффициента квадратичной функции;
- 2) найти действительные корни соответствующего квадратного уравнения или установить, что их нет;
- 3) построить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (или касания) с осью Ox , если они есть;
- 4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения.

69. Построить график функции $y = x^2 + x - 6$. Определить по графику значения x , при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения.
70. (Устно.) Используя график функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 21), указать, при каких значениях x эта функция принимает положительные значения; отрицательные значения; значение, равное нулю.

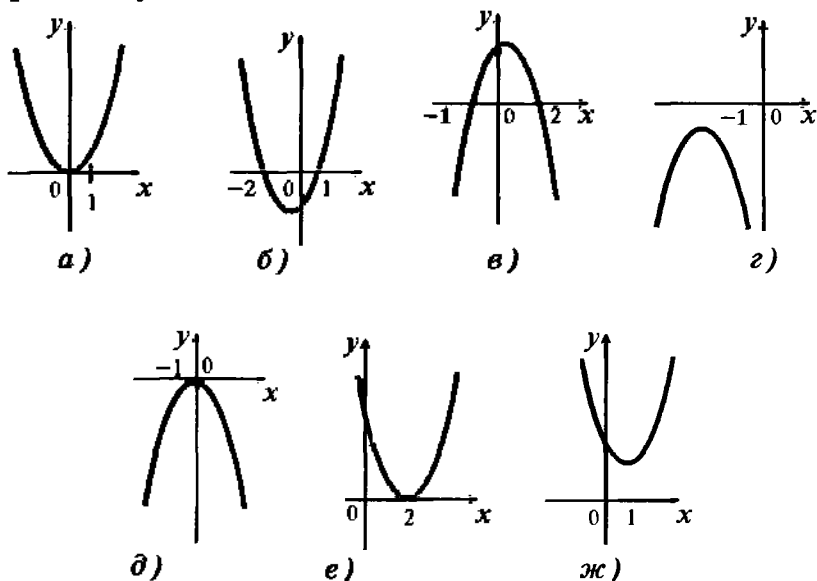


Рис. 21

Решить квадратное неравенство (71–75).

71. 1) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$; 3) $-x^2 + 3x - 2 < 0$;
 2) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$; 4) $-x^2 + 3x + 4 > 0$.
72. 1) $2x^2 + 7x - 4 < 0$; 3) $-2x^2 + x + 1 \geq 0$;
 2) $3x^2 - 5x - 2 > 0$; 4) $-4x^2 + 3x + 1 \leq 0$.
73. 1) $x^2 - 6x + 9 > 0$; 4) $4x^2 - 20x + 25 < 0$;
 2) $x^2 - 14x + 49 \leq 0$; 5) $-9x^2 - 6x - 1 < 0$;
 3) $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$; 6) $-2x^2 + 6x - 4,5 \leq 0$.

74. 1) $x^2 - 4x + 6 > 0$;
 2) $x^2 + 6x + 10 < 0$;
 3) $x^2 + x + 2 > 0$;

4) $x^2 + 3x + 5 < 0$;
 5) $2x^2 - 3x + 7 < 0$;
 6) $4x^2 - 8x + 9 > 0$.

75. 1) $5 - x^2 \geq 0$;
 2) $-x^2 + 7 < 0$;
 3) $-2,1x^2 + 10,5x < 0$;
 4) $-3,6x^2 - 7,2x < 0$;

5) $-6x^2 - x + 12 > 0$;
 6) $-3x^2 - 6x + 45 < 0$;
 7) $-\frac{1}{2}x^2 + 4,5x - 4 > 0$;
 8) $-x^2 - 3x - 2 > 0$.

76. (Устно.) Решить неравенство:

1) $x^2 + 10 > 0$;
 2) $x^2 + 9 < 0$;
 3) $(x - 1)^2 + 1 > 0$;
 4) $(x + 5)^2 + 3 < 0$;

5) $-(x + 1)^2 - 2 < 0$;
 6) $-(x - 2)^2 - 4 > 0$;
 7) $0,5x^2 + 8 \leq 0$;
 8) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 21 \geq 0$.

Решить квадратное неравенство (77–79).

77. 1) $4x^2 - 9 > 0$;
 2) $9x^2 - 25 > 0$;
 3) $x^2 - 3x + 2 > 0$;
 4) $x^2 - 3x - 4 < 0$;

5) $2x^2 - 4x + 9 \leq 0$;
 6) $3x^2 + 2x + 4 \geq 0$;
 7) $\frac{1}{2}x^2 - 4x \geq -8$;
 8) $\frac{1}{3}x^2 + 2x \leq -3$.

78. 1) $2x^2 - 8x \leq -8$;
 2) $x^2 + 12x \geq -36$;
 3) $9x^2 + 25 < 30x$;
 4) $16x^2 + 1 > 8x$;

5) $2x^2 - x \geq 0$;
 6) $3x^2 + x \leq 0$;
 7) $0,4x^2 - 1,1x + 1 \geq 0$;
 8) $x^2 - x + 0,26 \leq 0$.

79. 1) $x(x + 1) < 2(1 - 2x - x^2)$;
 2) $x^2 + 2 < 3x - \frac{1}{8}x^2$;
 3) $6x^2 + 1 \leq 5x - \frac{1}{4}x^2$;

4) $2x(x - 1) < 3(x + 1)$;
 5) $\frac{5}{3}x - \frac{1}{6}x^2 \leq x + 1$;
 6) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3} \geq x - 1$.

80. Найти все значения x , при которых функция принимает значения, не большие нуля:

1) $y = -x^2 + 6x - 9$;

3) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 4\frac{1}{2}$;

2) $y = x^2 - 2x + 1$;

4) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 12$.

1. Показать, что при $q > 1$ решениями неравенства $x^2 - 2x + q > 0$ являются все действительные значения x ;

2) показать, что при $q > 1$ неравенство $x^2 + 2x + q \leq 0$ не имеет решений.

Найти все значения r , для которых при всех действительных значениях x выполняется неравенство $x^2 - (2 + r)x + 4 > 0$.

§ 8

МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

При решении неравенств часто применяется *метод интервалов*. Поясним этот метод на примерах.

Задача 1. Выяснить, при каких значениях x квадратный трехчлен $x^2 - 4x + 3$ принимает положительные значения, а при каких — отрицательные.

△ Найдем корни уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Поэтому $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$. Точки $x = 1$ и $x = 3$ (рис. 22) разбивают числовую ось на три промежутка: $x < 1$, $1 < x < 3$, $x > 3$.

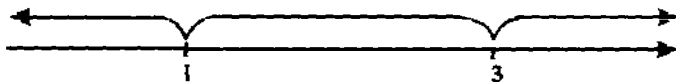


Рис. 22

Промежутки $x < 1$, $x > 3$, так же как и промежуток $1 < x < 3$, называют *интервалами*.

Двигаясь вдоль числовой оси справа налево, видим, что на интервале $x > 3$ трехчлен $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ принимает положительные значения, так как в этом случае оба множителя $x - 1$ и $x - 3$ положительны.

На следующем интервале $1 < x < 3$ этот трехчлен принимает отрицательные значения. Это происходит потому, что в произведении $(x-1)(x-3)$ при переходе через точку $x = 3$ первый множитель $x - 1$ не меняет знак, а второй $x - 3$ меняет знак.

При переходе через точку $x = 1$ трехчлен снова меняет знак, так как в произведении $(x-1)(x-3)$ первый множитель $x - 1$ меняет знак, а второй $x - 3$ не меняет.

Итак, при движении по числовой оси справа налево от одного интервала к соседнему знаки произведения $(x-1)(x-3)$ чередуются. Таким образом, задачу о знаке квадратного трехчлена $x^2 - 4x + 3$ можно решить следующим способом.

Отмечаем на числовой оси корни уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ — точки $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Они разбивают числовую ось (рис. 22) на три интервала. Заметив, что на интервале $x > 3$ значения трехчлена $x^2 - 4x + 3$ положительны, расставляем его знаки на остальных интервалах в порядке чередования (рис. 23).



Рис. 23

Из рисунка 23 видно, что $x^2 - 4x + 3 > 0$ при $x < 1$ или $x > 3$, а $x^2 - 4x + 3 < 0$ при $1 < x < 3$. ▲

Рассмотренный способ называют *методом интервалов*. Этот метод используется при решении квадратных и некоторых других неравенств.

Например, решая задачу 1, мы практически решили методом интервалов неравенства $x^2 - 4x + 3 > 0$ и $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Задача 2. Решить неравенство $x^3 - x < 0$.

▲ Разложим многочлен $x^3 - x$ на множители:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1).$$

Следовательно, неравенство можно записать так:

$$(x+1)x(x-1) < 0.$$

Отметим на числовой оси точки $-1, 0$ и 1 . Эти точки разбивают числовую ось на четыре интервала: $x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $x > 1$ (рис. 24).

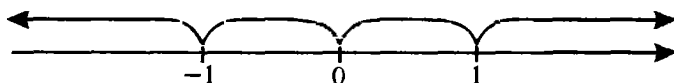


Рис. 24

При $x > 1$ все множители произведения $(x + 1)x(x - 1)$ положительны, и поэтому $(x + 1)x(x - 1) > 0$ на интервале $x > 1$. Учитывая смену знака произведения при переходе к соседнему интервалу, найдем для каждого интервала знак произведения $(x + 1)x(x - 1)$ (рис. 25).

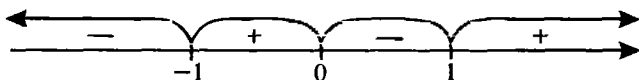


Рис. 25

Таким образом, решениями неравенства являются все значения x из интервалов $x < -1$ и $0 < x < 1$.

Ответ: $x < -1$ или $0 < x < 1$. ▲

Задача 3. Решить неравенство $(x^2 - 9)(x + 3)(x - 2) > 0$.

△ Данное неравенство можно записать в виде

$$(x + 3)^2(x - 2)(x - 3) > 0. \quad (1)$$

Так как $(x + 3)^2 > 0$ при всех $x \neq -3$, то при $x \neq -3$ множества решений неравенства (1) и неравенства

$$(x - 2)(x - 3) > 0 \quad (2)$$

совпадают.

Значение $x = -3$ не является решением неравенства (1), так как при $x = -3$ левая часть неравенства равна 0.

Решая неравенство (2) методом интервалов, получаем $x < 2$, $x > 3$ (рис. 26).

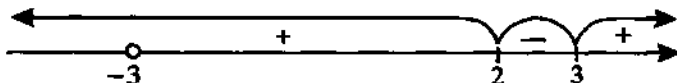


Рис. 26

Учитывая, что $x = -3$ не является решением исходного неравенства, окончательно получаем: $x < -3$, $-3 < x < 2$, $x > 3$.

Ответ: $x < -3$, $-3 < x < 2$, $x > 3$. ▲

Задача 4. Решить неравенство $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x - 4} \geq 0$.

△ Разложив числитель и знаменатель дроби на множители, получим:

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)} \geq 0. \quad (3)$$

Отметим на числовой оси точки -3 ; -1 ; 1 ; 4 , в которых числитель или знаменатель дроби обращаются в нуль. Эти точки разбивают числовую прямую на пять интервалов (рис. 27).

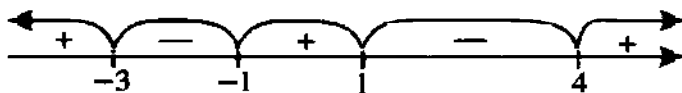


Рис. 27

При $x > 4$ все множители числителя и знаменателя дроби положительны, и поэтому дробь положительна. При переходе от одного интервала к следующему дробь меняет знак, поэтому можно расставить знаки дроби так, как это показано на рисунке 27.

Значения $x = -3$ и $x = 1$ удовлетворяют неравенству (3), а при $x = -1$ и $x = 4$ дробь не имеет смысла. Таким образом, исходное неравенство имеет следующие решения: $x \leq -3$, $-1 < x \leq 1$, $x > 4$.

Ответ: $x \leq -3$, $-1 < x \leq 1$, $x > 4$. ▲

У п р а ж н е н и я

83. (Устно.) Показать, что значение $x = 5$ является решением неравенства:

1) $(x-1)(x-3) > 0$;

3) $(x-7)(x-10) > 0$;

2) $(x+2)(x+5) > 0$;

4) $(x+1)(x-4) > 0$.

Решить методом интервалов неравенство (84–90).

84. 1) $(x + 2)(x - 7) > 0$;

3) $(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) < 0$;

2) $(x + 5)(x - 8) < 0$;

4) $(x + 5)\left(x - 3\frac{1}{2}\right) > 0$.

85. 1) $x^2 + 5x > 0$;

3) $2x^2 - x < 0$;

5) $x^2 + x - 12 < 0$;

2) $x^2 - 9x > 0$;

4) $x^2 + 3x < 0$;

6) $x^2 - 2x - 3 > 0$.

86. 1) $x^3 - 16x < 0$;

3) $(x^2 - 1)(x + 3) < 0$;

2) $4x^3 - x > 0$;

4) $(x^2 - 4)(x - 5) < 0$.

87. 1) $(x - 5)^2(x^2 - 25) > 0$;

4) $(x - 4)(x^2 - 16) > 0$;

2) $(x + 7)^2(x^2 - 49) < 0$;

5) $(x - 8)(x - 1)(x^2 - 1) \geq 0$;

3) $(x - 3)(x^2 - 9) < 0$;

6) $(x - 5)(x + 2)(x^2 - 4) \leq 0$.

88. 1) $\frac{x - 2}{x + 5} > 0$;

3) $\frac{1,5 - x}{3 + x} \geq 0$;

5) $\frac{(2x + 1)(x + 2)}{x - 3} < 0$;

2) $\frac{x - 4}{x + 3} < 0$;

4) $\frac{3,5 + x}{x - 7} < 0$;

6) $\frac{(x - 3)(2x + 4)}{x + 1} \geq 0$.

89. 1) $\frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 2)^2} \leq 0$;

3) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 4} > 0$;

2) $\frac{(x + 4)^2}{2x^2 - 3x + 1} \geq 0$;

4) $\frac{9x^2 - 4}{x - 2x^2} < 0$.

90. 1) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 1) > 0$;

3) $(x^2 - 7x + 12)(x^2 - x + 2) \leq 0$;

2) $(x + 2)(x^2 + x - 12) > 0$;

4) $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 2x - 15) \leq 0$.

Решить неравенство (91–93).

91. 1) $\frac{x^2 - x - 12}{x - 1} > 0$;

3) $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 2} \leq 0$;

2) $\frac{x^2 - 4x - 12}{x - 2} < 0$;

4) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x - 6} \geq 0$.

$$92. 1) \frac{x}{x-2} + \frac{3}{x} > \frac{3}{x-2};$$

$$2) \frac{x^2}{x^2+3x} + \frac{2-x}{x+3} < \frac{5-x}{x}.$$

$$93. 1) \frac{x^2-7x-8}{x^2-64} < 0;$$

$$3) \frac{5x^2-3x-2}{1-x^2} \geq 0;$$

$$2) \frac{x^2+7x+10}{x^2-4} > 0;$$

$$4) \frac{x^2-16}{2x^2+5x-12} > 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

Решить неравенство (94–100).

$$94. 1) (x-5,7)(x-7,2) > 0;$$

$$3) (x-2,5)(3-x) < 0;$$

$$2) (x-3)(x-4) > 0;$$

$$4) (x-3)(4-x) < 0.$$

$$95. 1) x^2 > x; \quad 2) x^2 > 36;$$

$$3) 4 > x^2; \quad 4) \frac{9}{16} \geq x^2.$$

$$96. 1) -9x^2 + 1 \leq 0;$$

$$3) -5x^2 - x \geq 0;$$

$$2) -4x^2 + 1 \geq 0;$$

$$4) -3x^2 + x \leq 0.$$

$$97. 1) -2x^2 + 4x + 30 < 0;$$

$$4) 2x^2 + 3x - 2 < 0;$$

$$2) -2x^2 + 9x - 4 > 0;$$

$$5) 6x^2 + x - 1 > 0;$$

$$3) 4x^2 + 3x - 1 < 0;$$

$$6) 5x^2 - 9x + 1 > 0.$$

$$98. 1) x^2 - 2x + 1 \geq 0;$$

$$4) -4x^2 - 12x - 9 < 0;$$

$$2) x^2 + 10x + 25 > 0;$$

$$5) \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4 > 0;$$

$$3) -x^2 + 6x - 9 < 0;$$

$$6) -x^2 + x - \frac{1}{4} < 0.$$

$$99. 1) x^2 - 3x + 8 > 0;$$

$$4) 3x^2 - 4x + 5 \leq 0;$$

$$2) x^2 - 5x + 10 < 0;$$

$$5) -x^2 + 2x + 4 \leq 0;$$

$$3) 2x^2 - 3x + 5 \geq 0;$$

$$6) -4x^2 + 7x - 5 \geq 0.$$

$$100. 1) (x-2)(x^2-9) > 0;$$

$$4) \frac{x-7}{(4-x)(2x+1)} \geq 0;$$

$$2) (x^2-1)(x+4) < 0;$$

$$5) \frac{4x^2-4x-3}{x+3} \geq 0;$$

$$3) \frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \leq 0;$$

$$6) \frac{2x^2-3x-2}{x-1} < 0.$$

Проверьте себя!

1. Решить неравенство:

1) $x^2 - 3x - 4 < 0$;

3) $-x^2 + 3x - 5 > 0$;

2) $3x^2 - 4x + 8 \geq 0$;

4) $x^2 + 20x + 100 \leq 0$.

2. Решить неравенство методом интервалов: $x(x-1)(x+2) \geq 0$.

Решить неравенство (101–105).

101. 1) $x^2 > 2 - x$; 3) $x + 8 < 3x^2 - 9$; 5) $10x - 12 < 2x^2$;

2) $x^2 - 5 < 4x$;

4) $x^2 \leq 10 - 3x$;

6) $3 - 7x \leq 6x^2$.

102. 1) $x^2 + 4 < x$;

5) $3x^2 - 5 > 2x$;

2) $x^2 + 3 > 2x$;

6) $2x^2 + 1 < 3x$;

3) $-x^2 + 3 \leq 4$;

7) $\frac{x^2}{10} + 2 \leq \frac{7x}{10}$;

4) $-x^2 - 5x \geq 8$;

8) $\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} > \frac{3x-10}{4}$.

103. 1) $\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}x^2 \geq 1 - x$;

4) $\frac{1}{3}x - \frac{4}{9} \geq x(x-1)$;

2) $\frac{1}{3}x(x+1) \leq (x-1)^2$;

5) $x\left(\frac{x}{4} - 1\right) \leq x^2 + x + 1$;

3) $x(1-x) > 1,5 - x$;

6) $2x - 2,5 > x(x-1)$.

104. 1) $\frac{2}{x-\sqrt{2}} > \frac{3}{x+\sqrt{2}}$;

3) $\frac{9}{2x+2} + \frac{x}{x-1} \geq \frac{1-3x}{2-2x}$;

2) $\frac{\sqrt{3}}{3-x^2} < \frac{2}{\sqrt{3}-x}$;

4) $\frac{3}{x^2-1} - \frac{1}{2} < \frac{3}{2x-2}$.

105. 1) $\frac{3x^2 - 5x - 8}{2x^2 - 5x - 3} > 0$;

3) $\frac{2 + 7x - 4x^2}{3x^2 + 2x - 1} \leq 0$;

2) $\frac{4x^2 + x - 3}{5x^2 + 9x - 9} < 0$;

4) $\frac{2 + 9x - 5x^2}{3x^2 - 2x - 1} \geq 0$.

106. Катер должен не более чем за 4 ч пройти по течению реки 22,5 км и вернуться обратно. С какой скоростью относительно воды должен идти катер, если скорость течения реки — 3 км/ч?

107. В одной системе координат построить графики функций и выяснить, при каких x значения одной функции больше (меньше) значений другой, результат проверить, решив соответствующее неравенство:

- | | |
|--------------------------|----------------------|
| 1) $y = 2x^2$, | $y = 2 - 3x$; |
| 2) $y = x^2 - 2$, | $y = 1 - 2x$; |
| 3) $y = x^2 - 5x + 4$, | $y = 7 - 3x$; |
| 4) $y = 3x^2 - 2x + 5$, | $y = 5x + 3$; |
| 5) $y = x^2 - 2x$, | $y = -x^2 + x + 5$; |
| 6) $y = 2x^2 - 3x + 5$, | $y = x^2 + 4x - 5$. |

108. Решить неравенство:

- | | |
|---|--|
| 1) $\frac{x^4 - 5x^2 - 36}{x^2 + x - 2} \geq 0$; | 3) $\frac{x^4 - x^2 - 2}{x^4 + x^2 - 2} < 0$; |
| 2) $\frac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 + 5x + 6} \leq 0$; | 4) $\frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^4 - 2x^2 - 3} > 0$. |

? ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ II

Решить неравенство (1–12).

1. $2x^2 - 8 \leq 0$.

A) $-2 \leq x \leq 2$; B) $-2 \leq x$; C) $x \geq 2$; D) $0 \leq x \leq 4$; E) $-2 \leq x \leq 4$.

2. $-3x^2 + 27 \geq 0$.

A) $x \leq 3$; B) $|x| \leq 3$; C) $x \geq 3$; D) $0 \leq x \leq 9$; E) $-3 \leq x \leq 0$.

3. $3x^2 - 9 \geq 0$.

A) $x < \sqrt{3}$; B) $x > \sqrt{3}$; C) $x < -\sqrt{3}$, $x > \sqrt{3}$; D) $x \geq 3$; E) $x < 3$.

4. $x^2 + 7x \geq 0$.

A) $x > 0$; B) $x > 7$; C) $0 < x < 7$; D) $x \leq -7$, $x \geq 0$; E) $-7 \leq x \leq 0$.

5. $-x^2 + 3x \leq 0$.

A) $x > 3$; B) $x \geq 0$; C) $0 < x < 3$; D) $-3 < x < 3$; E) $x \leq 0$, $x \geq 3$.

6. $(x + 3)(x - 4) > 0$.

A) $x < -3$, $x > 4$; B) $-3 < x < 4$; C) $x > 4$; D) $x < -3$; E) $0 < x < 4$.

7. $(x-1)(x+7) < 0$.

A) $x > -7$; B) $-7 < x < 1$; C) $x > 1$; D) $x < -7$, $x > 1$; E) $-1 < x < 7$.

8. $6x^2 + 5x - 6 > 0$.

A) $x > \frac{2}{3}$; C) $x < -\frac{3}{2}$, $x > \frac{2}{3}$; E) нет решений.

B) $x < \frac{3}{2}$; D) $-\frac{3}{2} < x < \frac{2}{3}$;

9. $-4x^2 + 8x - 3 > 0$.

A) $x > \frac{3}{2}$; B) $x < \frac{1}{2}$; C) $x < -\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$; E) $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$.

10. $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$.

A) $2 < x < 5$; C) $x \neq -2$, $x \neq 5$; E) $-2 < x \leq 2$.

B) $-2 < x < 5$; D) $-2 < x < 0$;

11. $\frac{x^2 + x}{-x^2 + 6x - 8} \geq 0$.

A) $-1 \leq x \leq 0$, $2 < x < 4$; C) $0 \leq x \leq 1$; E) правильный ответ не приведен.

B) $-2 < x < 4$; D) $-1 \leq x < 4$;

12. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 6} \geq 0$.

A) $-2 < x < 3$; C) $-1 \leq x < 3$; E) $-1 \leq x < 6$.

B) $x < -2$; $-1 \leq x \leq 1$, $x > 3$; D) $x \neq -2$, $x \neq 3$;

13. Найти сумму всех целых решений неравенства $x^2 + 6x + 5 < 0$.

A) 10; B) 9; C) -9; D) -10; E) -15.

14. Найти сумму всех натуральных решений неравенства $\frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 4x + 4} \leq 0$.

A) 29; B) 24; C) 25; D) 28; E) 27.

15. Сколько имеется целых значений p , для которых уравнение $x^2 + px + 9 = 0$ не имеет корней?

A) 10; B) 8; C) 13; D) 12; E) 11.

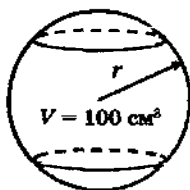
16. При каких значениях a неравенство $ax^2 + 4x + 9a < 0$ будет верным при всех значениях x ?

A) $a < -\frac{2}{3}$; B) $a > \frac{2}{3}$; C) $a < -1$; D) $a > 1$; E) $-\frac{2}{3} < a < \frac{3}{2}$.

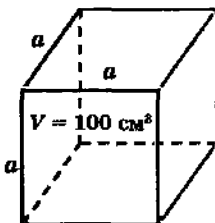
17. При каком наименьшем значении k уравнение $x^2 - 2(k+3)x + 20 + k^2 = 0$ имеет два различных действительных корня?
 А) $k = 3$; В) $k = 2$; С) $k = 1$; Д) $k = -2$; Е) $k = -1$.
18. При каких значениях k уравнение $\frac{4x-3}{x+2} = k+1$ имеет отрицательные корни?
 А) $\frac{3}{4} < k < 2$; С) $k < -\frac{5}{2}$, $k > 3$; Е) $-\frac{5}{2} < k < 3$.
 В) $\frac{5}{2} < k < 3$; Д) $k > 3$;
19. При каком значении a неравенство $ax^2 - 8x - 2 < 0$ верно при всех значениях x ?
 А) $-8 < a < 8$; В) $a \geq 8$; С) $a < 8$; Д) $a < -8$; Е) $a > -8$.
20. При каких значениях a корень уравнения $4(x+2) = 5 - ax$ будет больше -2 ?
 А) $a \geq -4$; С) $-4 < a < \frac{5}{2}$; Е) $a < -4$, $a > -\frac{5}{2}$.
 В) $-\frac{5}{2} < a < 4$; Д) $a \geq \frac{5}{2}$, $a < -4$;
21. Решить неравенство $\frac{1}{x} \geq x$.
 А) $x \leq -1$, $0 < x \leq 1$; С) $0 < x < 1$; Е) правильный ответ не приведен.
 В) $x \leq -1$; Д) $-1 \leq x \leq 1$;
22. Решить неравенство $\frac{2x-1}{x} < 2$.
 А) $x < 0$; В) $x > 0$; С) $\frac{1}{2} < x < 2$; Д) $x < 2$; Е) $x > \frac{1}{2}$.
23. Найти сумму всех целых решений неравенства $\frac{x-3}{x+2} \leq 0$.
 А) -3 ; В) 6 ; С) 5 ; Д) 4 ; Е) -5 .
24. Решить неравенство $\frac{x^2-x-20}{x^2+11x+24} \geq 0$.
 А) $x < -8$, $x \geq 5$; В) $-4 \leq x < -3$; С) $-4 \leq x \leq 5$;
 Д) $x < -8$, $-4 \leq x < -3$, $x \geq 5$; Е) $x < -3$, $x > 5$.
25. Найти произведение всех решений неравенства $\frac{-x^2-5x+6}{x^2+7x+10} \geq 0$.
 А) 1 ; В) -1 ; С) -6 ; Д) 2 ; Е) 0 .

Глава III

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ



$a < r$?
 $a > r$?



§ 9

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

При рассмотрении свойств функции с натуральным показателем отмечалось, что свойство деления степеней

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad (1)$$

справедливо при $n > m$ и $a \neq 0$.

Если $n \leq m$, то в правой части равенства (1) показатель степени $n - m$ отрицателен или равен нулю.

Степень с отрицательным и нулевым показателем определяют так, чтобы равенство (1) было верно не только при $n > m$, но и при $n \leq m$. Например, если $n = 2$, $m = 5$, то по формуле (1) получаем:

$$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}.$$

$$\text{С другой стороны, } a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a^2}{a^2 a^3} = \frac{1}{a^3}.$$

$$\text{Поэтому считают, что } a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$



Определение 1. Если $a \neq 0$ и n — натуральное число, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Например,

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}; \quad (-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}; \quad (-0,5)^{-3} = \frac{1}{(-0,5)^3} = -\frac{1}{0,125} = -8.$$

Если $n = m$, то по формуле (1) получаем:

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

С другой стороны, $a^n : a^n = \frac{a^n}{a^n} = 1$. Поэтому считают, что $a^0 = 1$.



Определение 2. Если $a \neq 0$, то

$$a^0 = 1.$$

Например, $3^0 = 1$, $\left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$.

Степени с отрицательными показателями уже использовались при записи чисел в *стандартном виде*. Например,

$$0,00027 = 2,7 \cdot \frac{1}{10^4} = 2,7 \cdot 10^{-4}.$$

Все свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степени с любым целым показателем.



Для любых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любых целых n и m справедливы равенства:

$$1. a^n a^m = a^{n+m}.$$

$$2. a^n : a^m = a^{n-m}.$$

$$3. (a^n)^m = a^{nm}.$$

$$4. (ab)^n = a^n b^n.$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Докажем, например, справедливость равенства $(ab)^n = a^n b^n$ при $n < 0$.

○ Пусть n — целое отрицательное число. Тогда $n = -k$, где k — натуральное число. Используя определение степени с отрицательным показателем и свойства степени с натуральным показателем, получаем:

$$(ab)^n = (ab)^{-k} = \frac{1}{(ab)^k} = \frac{1}{a^k b^k} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k} = a^{-k} \cdot b^{-k} = a^n b^n. \bullet$$

Аналогично доказываются и другие свойства степени с целым показателем.

Приведем примеры применения свойств степени с целым показателем:

$$1) 4^{-3} \cdot 4^{11} \cdot 4^{-6} = 4^{-3+11-6} = 4^2 = 16;$$

$$2) \left(\frac{p^{-3}}{3q^2} \right)^{-2} = \frac{p^{-3 \cdot (-2)}}{3^{-2} \cdot q^{2 \cdot (-2)}} = \frac{p^6}{9q^{-4}} = 9p^6q^4.$$

Задача. Упростить выражение $a^6(a^{-2} - a^{-4})(a^2 + a^3)^{-1}$.

$$\begin{aligned} \Delta a^6(a^{-2} - a^{-4})(a^2 + a^3)^{-1} &= a^6 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^4} \right) \cdot \frac{1}{a^2 + a^3} = \\ &= a^6 \cdot \frac{a^2 - 1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^2(1+a)} = a - 1. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

У п р а ж н е н и я

109. Вычислить:

$$1) 2^3 + (-3)^3 - (-2)^2 + (-1)^5;$$

$$3) 13 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^3 + 2^3;$$

$$2) (-7)^2 - (-4)^3 - 3^4;$$

$$4) 6(-2)^3 - 5(-2)^3 - (-2)^3.$$

110. Представить выражение в виде степени с натуральным показателем:

$$1) \frac{7^2 \cdot 7^{15}}{7^{13}}; \quad 2) \frac{5^3 \cdot 5^{10} \cdot 5}{5^4 \cdot 5^{15}}; \quad 3) \frac{a^2 a^8 b^3}{a^9 b^2}; \quad 4) \frac{c^3 d^5 c^9}{c^{10} d^7}.$$

111. (Устно.) Вычислить:

$$1) 1^{-5}; \quad 2) 4^{-3}; \quad 3) (-10)^0; \quad 4) (-5)^{-2}; \quad 5) \left(\frac{1}{2} \right)^{-4}; \quad 6) \left(\frac{3}{7} \right)^{-1}.$$

112. Записать в виде степени с отрицательным показателем:

$$1) \frac{1}{4^5}; \quad 2) \frac{1}{21^3}; \quad 3) \frac{1}{x^7}; \quad 4) \frac{1}{a^9}.$$

Вычислить (113–114).

113. 1) $\left(\frac{10}{3}\right)^{-3}$; 3) $(0,2)^{-4}$; 5) $-(-17)^{-1}$;

2) $\left(-\frac{9}{11}\right)^{-2}$; 4) $(0,5)^{-5}$; 6) $-(-13)^{-2}$.

114. 1) $3^{-1} + (-2)^{-2}$; 3) $(0,2)^{-2} + (0,5)^{-5}$;

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - 4^{-2}$; 4) $(-0,1)^{-3} - (-0,2)^{-3}$.

115. (Устно.) Сравнить с единицей:

1) 12^{-3} ; 2) 21^0 ; 3) $(0,6)^{-5}$; 4) $\left(\frac{5}{19}\right)^{-4}$.

116. Записать без степеней с отрицательным показателем:

1) $(x - y)^{-2}$; 3) $3b^{-5}c^8$; 5) $a^{-1}b^2c^{-3}$;

2) $(x + y)^{-3}$; 4) $9a^3b^{-4}$; 6) $a^2b^{-1}c^{-4}$.

Вычислить (117–118).

117. 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-4}$; 3) $0,3^7 \cdot 0,3^{-10}$; 4) $17^{-5} \cdot 17^3 \cdot 17$.

1) $9^7 : 9^{10}$; 3) $\left(\frac{2}{13}\right)^{-12} : \left(\frac{2}{13}\right)^{-10}$;

2) $(0,2)^2 : (0,2)^{-2}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$.

119. Возвести степень в степень:

1) $(a^3)^{-5}$; 2) $(b^{-2})^{-4}$; 3) $(a^{-3})^7$; 4) $(b^7)^{-4}$.

120. Возвести в степень произведение:

1) $(ab^{-2})^3$; 2) $(a^2b^{-1})^4$; 3) $(2a^2)^{-6}$; 4) $(3a^3)^{-4}$.

Выполнить действия:

1) $\left(\frac{a^8}{b^7}\right)^{-3}$; 2) $\left(\frac{m^{-4}}{n^{-5}}\right)^{-3}$; 3) $\left(\frac{2x^6}{3y^{-4}}\right)^2$; 4) $\left(\frac{-4x^{-5}y}{z^3}\right)^3$.

122. Вычислить значение выражения:

1) $(x^2y^{-2} - 4y^{-2}) \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{-2}$ при $x = 5, y = 6, 7$;

2) $((a^2b^{-1})^4 - a^0b^4) : \frac{a^4 - b^4}{b^2}$ при $a = 2, b = -3$.

Записать в стандартном виде (123–124).

123. 1) $200\,000^4$;

3) 4000^{-2} ;

2) $0,003^3$;

4) $0,002^{-3}$.

124. 1) $0,0000087$;

3) $\frac{1}{125}$;

2) $0,00000005086$;

4) $\frac{1}{625}$.

125. Процесс шлифовки стекла заканчивается, когда глубина выемок на его поверхности не превышает $3 \cdot 10^{-3}$ мм. Записать это число в виде десятичной дроби.

126. Ядро сверхтяжелого водорода существует лишь $0,00\,000\,000\,001$ сек. Записать это число в виде степени с отрицательным показателем.

127. Размеры вируса гриппа составляют около 10^{-4} мм. Записать это число в виде десятичной дроби.

128. Представить дробь в виде степени и найти ее значение при данном значении a :

1) $\frac{a^8 a^{-7}}{a^{-2}}, a = 0,8$;

2) $\frac{a^{15} a^3}{a^{18}}, a = \frac{1}{2}$.

129. Вычислить:

1) $((-20)^7)^{-7} : ((-20)^{-6})^8 + 2^{-2}$; 2) $((-17)^{-4})^{-6} : ((-17)^{-13})^{-4} - \left(\frac{1}{17}\right)^2$.

130. Упростить:

1) $(a^{-3} + b^{-3}) \cdot (a^{-2} - b^{-2})^{-1} \cdot (a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2})^{-1}$;

2) $(a^{-2}b - ab^{-2}) \cdot (a^{-2} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2})^{-1}$.

Известный астроном и математик Самаркандской научной школы Улугбека *Гияс эд-Дин Джамшид аль-Каши* определил действие извлечения корня n -й степени в своем трактате «Ключ арифметики». Пятая глава этого произведения носит название «Определение основания степени».

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Решить уравнение $x^4 = 81$.

Δ Запишем уравнение в виде $x^4 - 81 = 0$ или $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$.

Так как $x^2 + 9 \neq 0$, то $x^2 - 9 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. ▲

Таким образом, уравнение $x^4 = 81$ имеет два действительных корня $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Их называют корнями четвертой степени из числа 81, а положительный корень (число 3) называют *арифметическим корнем* четвертой степени из числа 81 и обозначают $\sqrt[4]{81}$. Таким образом, $\sqrt[4]{81} = 3$.

Можно доказать, что уравнение $x^n = a$, где n — натуральное число, a — неотрицательное число, имеет единственный неотрицательный корень. Этот корень называют *арифметическим корнем n -й степени из числа a* .

! Определение. *Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n -я степень которого равна a .*

Арифметический корень n -й степени из числа a обозначается так: $\sqrt[n]{a}$. Число a называется *подкоренным выражением*. Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.

Арифметический корень второй степени называют также *квадратным корнем*, а корень третьей степени — *кубическим корнем*.

В тех случаях, когда ясно, что речь идет об арифметическом корне n -й степени, кратко говорят: «корень n -й степени».

! Чтобы, используя определение, доказать, что $\sqrt[n]{a}$ равен b , нужно показать, что: 1) $b \geq 0$; 2) $b^n = a$.

Например, $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4 \geq 0$ и $4^3 = 64$.



Из определения арифметического квадратного корня следует, что если $a \geq 0$, то

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Например, $(\sqrt[5]{7})^5 = 7$, $\sqrt[6]{13^6} = 13$.

Действие, посредством которого отыскивается корень n -й степени, называется *извлечением корня n -й степени*. Это действие является обратным к возведению в n -ю степень.

Задача 2. Решить уравнение $x^3 = -8$.

△ Это уравнение можно записать так:

$$-x^3 = 8 \text{ или } (-x)^3 = 8.$$

Обозначим $-x = y$, тогда $y^3 = 8$.

Это уравнение имеет один положительный корень $y = \sqrt[3]{8} = 2$. Отрицательных корней уравнение $y^3 = 8$ не имеет, так как $y^3 < 0$ при $y < 0$. Число $y = 0$ также не является корнем этого уравнения.

Таким образом, уравнение $y^3 = 8$ имеет только один корень $y = 2$, а значит, уравнение $x^3 = -8$ имеет только один корень $x = -y = -2$.

Ответ: $x = -2$. ▲

Коротко решение уравнения $x^3 = -8$ можно записать так:

$$x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$



Вообще, для любого нечетного натурального числа $2k + 1$ уравнение $x^{2k+1} = a$ при $a < 0$ имеет только один корень, причем отрицательный. Этот корень обозначается, как и арифметический корень, символом: $\sqrt[2k+1]{a}$. Его называют *корнем нечетной степени из отрицательного числа*.

Например, $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -2$.



Корень нечетной степени из отрицательного числа a связан с арифметическим корнем из числа $-a = |a|$ следующим равенством:

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

Например, $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$.

131. (Устно.)

1) Найти арифметический квадратный корень из числа:

1; 0; 16; 0,81; 169; $\frac{1}{289}$.

2) Найти арифметический кубический корень из числа:

1; 0; 125; $\frac{1}{27}$; 0,027; 0,064.

3) Найти арифметический корень четвертой степени из числа:

0; 1; 16; $\frac{16}{81}$; $\frac{256}{625}$; 0,0016.

Вычислить (132–134).

132. 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$.

133. 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}$.

134. 1) $\sqrt[3]{-64}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; 4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-34^3}$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}$.

135. Решить уравнение:

1) $x^4 = 81$; 2) $x^5 = -\frac{1}{32}$; 3) $5x^5 = -160$; 4) $2x^6 = 128$.

136. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[3]{x+3}$; 3) $\sqrt[5]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$

Вычислить (137–138):

137. 1) $\sqrt[3]{-125} + \frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; 4) $\sqrt[3]{-1000} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;
 2) $\sqrt[5]{32} - 0,5\sqrt[3]{-216}$; 5) $\sqrt[4]{0,0001} - 2\sqrt{0,25} + \sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$;
 3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625}$; 6) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} + \sqrt[3]{-0,001} - \sqrt[4]{0,0016}$.

$$138. 1) \sqrt{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9-\sqrt{17}};$$

$$3) (\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}})^2;$$

$$2) (\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2;$$

$$4) \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

139. Упростить выражение:

$$1) \sqrt[3]{(x-2)^3} \text{ при: а) } x \geq 2; \text{ б) } x < 2;$$

$$2) \sqrt{(3-x)^6} \text{ при: а) } x \leq 3; \text{ б) } x > 3.$$

140. Сколько имеется натуральных чисел n , таких, что

$$1987 < \sqrt{n} < 1998?$$

§ 11

СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КОРНЯ

Арифметический корень n -й степени обладает следующими свойствами:



Если $a \geq 0$, $b > 0$ и n, m — натуральные числа, причем $n \geq 2$, $m \geq 2$, то:

$$1. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}.$$

$$3. (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$4. \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

В свойстве 1 число b может быть также равным 0, в свойстве 3 число m может быть любым целым, если $a > 0$.

Докажем, например, что $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$.

○ Воспользуемся определением арифметического корня:

$$1) \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \geq 0, \text{ так как } a \geq 0 \text{ и } b \geq 0,$$

$$2) (\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n = ab, \text{ так как } (\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab. \bullet$$

Аналогично доказываются и остальные свойства.

Приведем примеры применения свойств арифметического корня.

$$1) \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3;$$

$$2) \sqrt[3]{\frac{256}{625}} : \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{256}{625} : \frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}; \quad 4) \sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2;$$

$$3) \sqrt[7]{5^{21}} = \left(\sqrt[7]{5^7}\right)^3 = 5^3 = 125;$$

$$5) (\sqrt[4]{9})^{-2} = \sqrt[4]{9^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}.$$

Задача. Упростить выражение $\frac{(\sqrt[4]{a^3b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$, где $a > 0, b > 0$.

Δ Используя свойства арифметического корня, получаем:

$$\frac{(\sqrt[4]{a^3b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}} = \frac{a^3b^2}{\sqrt[3]{a^{12}b^6}} = \frac{a^3b^2}{a^4b^2} = ab. \quad \blacktriangle$$

У п р а ж н е н и я

Вычислить (141–144).

141. 1) $\sqrt[3]{343 \cdot 0,125}$;

3) $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081}$;

2) $\sqrt[3]{864 \cdot 216}$;

4) $\sqrt[5]{32 \cdot 100000}$.

142. 1) $\sqrt[3]{5^3 \cdot 7^3}$; 2) $\sqrt[4]{11^4 \cdot 3^4}$; 3) $\sqrt[5]{(0,2)^5 \cdot 8^5}$; 4) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot 21^7}$.

143. 1) $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{500}}$; 2) $\sqrt[3]{0,2 \cdot \sqrt[3]{0,04}}$; 3) $\sqrt[4]{324 \cdot \sqrt[4]{4}}$; 4) $\sqrt[5]{2 \cdot \sqrt[5]{16}}$.

144. 1) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^6}$; 3) $\sqrt[4]{3^{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8}$; 4) $\sqrt[10]{4^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$.

145. Извлечь корень:

1) $\sqrt[3]{64x^3z^6}$; 2) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}$;

3) $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}}$; 4) $\sqrt[6]{a^{12}b^{18}}$.

146. Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{2ab^2} \cdot \sqrt[3]{4a^2b}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^8c}{b}}$;

2) $\sqrt[4]{3a^2b^3} \cdot \sqrt[4]{27a^2b}$;

4) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2ab}}$.

¹ Здесь и далее буквами обозначены положительные числа, если нет дополнительных условий.

Вычислить (147–148).

147. 1) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; 3) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; 4) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

148. 1) $\sqrt[4]{324} : \sqrt[4]{4}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$; 5) $(\sqrt{20} - \sqrt{45}) : \sqrt{5}$;
2) $\sqrt[3]{128} : \sqrt[3]{2000}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$; 6) $(\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{5}) : \sqrt[3]{5}$.

149. Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{a^6 b^7} : \sqrt[3]{ab^2}$; 2) $\sqrt[3]{81x^4 y} : \sqrt[3]{3xy}$;
3) $\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}} : \sqrt[3]{\frac{y}{9x^2}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2b}{a^3}} : \sqrt[3]{\frac{a}{8b^3}}$.

Вычислить (150–152).

150. 1) $(\sqrt[6]{7^3})^2$; 2) $(\sqrt[6]{9})^{-3}$; 3) $(\sqrt[10]{32})^2$; 4) $(\sqrt[8]{16})^{-4}$.

151. 1) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{1024}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[2]{3^7}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}} \cdot \sqrt[6]{5^5}$.

152. Упростить выражение:

1) $(\sqrt[3]{x})^6$; 3) $(\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b})^6$; 5) $(\sqrt{\sqrt[3]{a^2 b}})^6$;
2) $(\sqrt[3]{y^2})^3$; 4) $(\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3})^{12}$; 6) $(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}})^4$.

Вычислить (153–155).

153. 1) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{2\frac{1}{4}}$; 3) $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}} : \sqrt[4]{\frac{2}{5}}$; 5) $(\sqrt[3]{\sqrt{27}})^2$;
2) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[6]{6\frac{3}{4}}$; 4) $\sqrt[3]{11\frac{1}{4}} : \sqrt[3]{3\frac{1}{3}}$; 6) $(\sqrt{\sqrt[3]{16}})^3$.

$$154. 1) \sqrt[3]{\frac{ab^2}{c}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^5b}{c^2}}; \quad 3) \frac{\sqrt[4]{a^2b^2c} \cdot \sqrt[4]{a^3b^3c^2}}{\sqrt[4]{abc^8}}; \quad 5) (\sqrt[5]{a^3})^5 \cdot (\sqrt[3]{b^2})^3;$$

$$2) \sqrt[4]{\frac{8a^3}{b^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{4a^7}{b^3}}; \quad 4) \frac{\sqrt[3]{2a^4b} \cdot \sqrt[3]{4ab}}{2b\sqrt[3]{a^2b^2}}; \quad 6) (\sqrt[4]{a^3b^3})^4 : (\sqrt[3]{ab^2})^3.$$

$$155. 1) \frac{\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}; \quad 4) \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} + \sqrt[4]{18} \sqrt[4]{4\frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{256}};$$

$$2) \frac{\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}; \quad 5) \sqrt[3]{11 - \sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11 + \sqrt{57}};$$

$$3) \frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt{\sqrt[3]{64}}; \quad 6) \sqrt[4]{17 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17 + \sqrt{33}}.$$

Упростить выражение (156–157).

$$156. 1) \sqrt[3]{2ab} \cdot \sqrt[3]{4a^2b} \cdot \sqrt[3]{27b}; \quad 3) \frac{\sqrt[5]{a^8b^2} \cdot \sqrt[5]{3a^2b^3}}{\sqrt[5]{3ab}};$$

$$2) \sqrt[4]{abc} \cdot \sqrt[4]{a^3b^2c} \cdot \sqrt[4]{b^5c^2}; \quad 4) \frac{\sqrt[4]{8x^2y^5} \cdot \sqrt[4]{4x^3y}}{\sqrt[4]{2xy^2}}.$$

$$157. 1) \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}} + (\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^4}})^3; \quad 4) \sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}} - (\sqrt[5]{xy^2})^5;$$

$$2) (\sqrt[3]{\sqrt{x^2}})^3 + 2(\sqrt[4]{\sqrt{x}})^8; \quad 5) (\sqrt[4]{\sqrt{x^8y^2}})^4 - (\sqrt[4]{x^2y^8})^2;$$

$$3) 2\sqrt{\sqrt{a^4b^8}} - (\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^6}})^2; \quad 6) ((\sqrt[5]{\sqrt{a^5a}})^5 - \sqrt[5]{a}) : \sqrt[10]{a^2}.$$

158. Вычислить:

$$1) \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}}; \quad 3) (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5});$$

$$2) \frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}; \quad 4) (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}).$$

159. Доказать, что $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2$.

§ 12 СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Задача 1. Вычислить $\sqrt[4]{5^{12}}$.

△ Так как $5^{12} = (5^3)^4$, то $\sqrt[4]{5^{12}} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125$. ▲

Таким образом, $\sqrt[4]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{4}}$.

Точно так же можно показать, что $\sqrt[5]{7^{-15}} = 7^{-\frac{15}{5}}$.



Вообще, если n — натуральное число, $n \geq 2$, m — целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при $a > 0$ справедливо следующее равенство:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \quad (1)$$

○ По условию $\frac{m}{n}$ — целое число, то есть при делении m на n в результате получается некоторое целое число k . Тогда из равенства $\frac{m}{n} = k$ следует, что $m = kn$. Применяя свойства степени и арифметического корня, получаем:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}. \quad \bullet$$

Если же частное $\frac{m}{n}$ не является целым числом, то степень $a^{\frac{m}{n}}$, где $a > 0$, определяют так, чтобы осталась верной формула (1), т. е. и в этом случае считают, что

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \quad (2)$$

Таким образом, формула (2) справедлива для любого целого числа m и любого натурального числа $n \geq 2$ и $a > 0$. Например,

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8; \quad 7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^6}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Напомним, что *рациональное число* r — это число вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число, т. е. $r = \frac{m}{n}$. Тогда по формуле (2) получаем $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Таким образом, степень определена для любого рационального показателя и любого положительного основания. Если $r = \frac{m}{n} > 0$, то выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл не только при $a > 0$, но и при $a = 0$. Если $a = 0$, то $\sqrt[n]{0^m} = 0$. Поэтому считают, что при $r > 0$ выполняется равенство $0^r = 0$.

Пользуясь формулами (1) и (2), степень с рациональным показателем можно представить в виде корня и наоборот.

Отметим, что из формулы (2) и свойств корня следует равенство

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}},$$

где $a > 0$, m — целое число, n, k — натуральные числа.

Например, $7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{6}{8}} = 7^{\frac{9}{12}}$.



Можно показать, что *все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием*. А именно, для любых рациональных чисел p и q и любых $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.	4) $(ab)^p = a^p b^p$,
2) $a^p : a^q = a^{p-q}$,	5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.
3) $(a^p)^q = a^{pq}$,	

Эти свойства вытекают из свойств корней.

Докажем, например, свойство $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

○ Пусть $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$, где n и l — натуральные числа, m и k — целые числа. Нужно доказать, что

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}. \quad (3)$$

Приведя дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ к общему знаменателю, запишем левую часть равенства (3) в виде

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}}.$$

Используя определение степени с рациональным показателем, свойства корня и степени с целым показателем, получаем:

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} &= a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} = \\ &= \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}. \bullet \end{aligned}$$

Аналогично доказываются остальные свойства степени с рациональным показателем.

Приведем примеры применения свойств степени.

$$1) 7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 7;$$

$$2) 9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$$

$$3) \left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$$

$$4) 24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^2} = 4\sqrt[3]{9};$$

$$5) \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}.$$

Задача 2. Вычислить $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

$$\Delta 25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^5)^{\frac{1}{5}} = 5. \blacktriangle$$

Задача 3. Упростить выражение $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

$$\Delta \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)} = ab. \blacktriangle$$

Задача 4. Упростить выражение $\frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}.$

$$\begin{aligned} \Delta \quad \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}} &= \frac{a^{\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1 - a)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1 + a)} = \\ &= 1 + a - (1 - a) = 2a. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Покажем, как можно ввести степень с иррациональным показателем, например, $3^{\sqrt{2}}$. Выпишем последовательно приближенные значения $\sqrt{2}$ с точностью 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. Получим последовательность:

$$1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \dots$$

Запишем последовательность степеней числа 3 с этими рациональными показателями:

$$3^{1,4}; 3^{1,41}; 3^{1,414}; 3^{1,4142}; \dots$$

Можно показать, что эти степени являются последовательными приближенными значениями некоторого действительного числа, которое обозначают $3^{\sqrt{2}}$:

$$3^{1,4} = \underline{4,6555355},$$

$$3^{1,41} = \underline{4,7069644},$$

$$3^{1,414} = \underline{4,7276942},$$

$$3^{1,442} = \underline{4,7287329},$$

$$3^{\sqrt{2}} \approx \underline{4,7288033}.$$

Аналогично определяется степень a^b с положительным основанием a и любым иррациональным показателем. Таким образом, теперь степень с положительным основанием определена для любого действительного показателя, причем свойства степени с действительным показателем такие же, как и свойства степени с рациональным показателем.

160. (Устно.) Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}$; 4) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}$.

161. (Устно.) Представить в виде корня из степени с целым показателем:

1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3b)^{\frac{2}{3}}$.

Вычислить (162–165).

162. 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$; 4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

163. 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; 5) $(7^{-3})^{-\frac{2}{3}}$;
2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$; 6) $(8^{\frac{1}{12}})^{-4}$.

164. 1) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$.

165. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}$;
2) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

166. Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$ при $a = 0,09$; 3) $\frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ при $b = 1,3$;
2) $\sqrt{b} : \sqrt[3]{b}$ при $b = 27$; 4) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$ при $a = 2,7$.

167. Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; 3) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$; 5) $x^{1,7} \cdot x^{2,8} : \sqrt{x^5}$;
2) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$; 4) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$; 6) $y^{-3,8} : y^{-2,3} \cdot \sqrt{y^3}$.

Упростить выражение (168–169).

168. 1) $(a^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot (b^{-\frac{2}{3}})^{-6}$;

2) $\left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}} \right)^4 \right)^{\frac{1}{12}}$.

169. 1) $\frac{a^{\frac{4}{3}}(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})}$;

3) $\frac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1} - ab^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$;

2) $\frac{b^{\frac{1}{5}}(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}})}{b^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}})}$;

4) $\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

170. Вычислить:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \right) \cdot \sqrt[3]{6}$;

2) $\left(5^{\frac{1}{4}} : 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{3}{4}} \right) \cdot \sqrt[4]{1000}$.

171. Упростить выражение:

1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a^3\sqrt{a}}$;

5) $\frac{x-y}{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

2) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b^4\sqrt{b}}$;

6) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\frac{1}{a^4-b^4}}$;

3) $(\sqrt[3]{ab^{-2}} + (ab)^{-\frac{1}{6}})\sqrt[6]{ab^4}$;

7) $\frac{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}{m+2\sqrt{mn}+n}$;

4) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab})$;

8) $\frac{c-2c^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{c-1}}$.

Упростить выражение (172–174).

172. 1) $\left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)^2$;

3) $\frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{\frac{1}{a^4} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{b^2} + b^{-\frac{1}{2}}}$;

2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right)$;

4) $\frac{\sqrt{a} - a^{-\frac{1}{2}}b}{1 - \sqrt{a^{-1}b}} - \frac{\sqrt[3]{a^2} - a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a} + a^{-\frac{1}{6}}\sqrt{b}}$.

173.

$$1) \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} - \frac{2a^2-4ab}{a-b};$$

$$2) \frac{3xy-y^2}{x-y} - \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}};$$

$$174. 1) \frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \frac{a+b}{\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{b^{\frac{2}{3}}}};$$

$$2) \frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}};$$

$$3) \frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - \frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}};$$

$$4) \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}.$$

$$3) \frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b} - \frac{1}{\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{b^{\frac{2}{3}}}};$$

$$4) \frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b} + \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}.$$

§ 13

ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ ЧИСЛОВОГО НЕРАВЕНСТВА

В четвертом параграфе главы III учебника «Алгебра» для 8-го класса было доказано, что при умножении неравенств одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, получается неравенство того же знака.



Отсюда следует, что если $a > b > 0$ и n — натуральное число, то $a^n > b^n$.

○ По условию $a > 0$, $b > 0$. Перемножая n одинаковых неравенств $a > b$, получаем $a^n > b^n$. ●

Задача 1. Сравнить числа $(0,43)^5$ и $\left(\frac{3}{7}\right)^5$.

△ Так как $\frac{3}{7} \approx 0,428$ с точностью до 0,001, то $0,43 > \frac{3}{7}$. Поэтому

$$(0,43)^5 > \left(\frac{3}{7}\right)^5. \blacktriangle$$



Неравенство, у которого левая и правая части положительны, можно возводить в любую рациональную степень:

$$\text{если } a > b > 0, r > 0, \text{ то } a^r > b^r, \quad (1)$$

$$\text{если } a > b > 0, r < 0, \text{ то } a^r < b^r. \quad (2)$$

Докажем свойство (1).

○ Докажем сначала, что свойство (1) верно при $r = \frac{1}{n}$, а затем в общем случае при $r = \frac{m}{n}$.

а) Пусть $r = \frac{1}{n}$, где n — натуральное число, большее 1, $a > 0, b > 0$. По условию $a > b$. Нужно доказать, что $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$. Предположим, что это неверно, т. е. $a^{\frac{1}{n}} \leq b^{\frac{1}{n}}$. Но тогда, возведя это неравенство в натуральную степень n , получим $a \leq b$, что противоречит условию $a > b$. Итак, из $a > b > 0$ следует, что $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$.

б) Пусть, $r = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Тогда по доказанному из условия $a > b > 0$ следует, что $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$. Возведя это неравенство в натуральную степень m , получим $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m > \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m$, т. е. $a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}$. ●

Например, $5^{\frac{2}{7}} > 3^{\frac{2}{7}}$, так как $5 > 3$; $2^{\frac{3}{4}} < 4^{\frac{3}{4}}$, так как $2 < 4$;

$\sqrt[5]{7^2} > \sqrt[5]{6^2}$, так как $7 > 6$.

Теперь докажем свойство (2).

○ Если $r < 0$, то $-r > 0$. По свойству (1) из условия $a > b > 0$ следует, что $a^{-r} > b^{-r}$. Умножая обе части этого неравенства на положительное число $a^r b^r$, получаем $b^r > a^r$, т. е. $a^r < b^r$. ●

Например, $(0,7)^{-8} < (0,6)^{-8}$, так как $0,7 > 0,6$; $13^{-0,6} > 15^{-0,6}$, так как $13 < 15$; $\sqrt[4]{8^{-3}} > \sqrt[4]{7^{-3}}$, так как $8 > 7$.

В курсе высшей математики доказывается, что свойство (1) справедливо для любого положительного действительного числа r , а свой-

ство (2) — для любого отрицательного действительного числа r . На-

пример, $\left(\frac{8}{9}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{2}}$, так как $\frac{8}{9} > \frac{7}{8}$; $\left(\frac{7}{8}\right)^{-\sqrt{3}} < \left(\frac{6}{7}\right)^{-\sqrt{3}}$, так как $\frac{7}{8} > \frac{6}{7}$.

Отметим, что рассмотренные свойства возведения в степень строгих неравенств (со знаками $>$ или $<$) справедливы и для нестрогих неравенств (со знаком $\geq$ или $\leq$).



Итак, если обе части неравенства положительны, то при возведении его в *положительную степень* смысл неравенства *сохраняется*, а при возведении в *отрицательную степень* смысл неравенства *меняется на противоположный*.

Напомним, что для строгих неравенств *противоположными* считаются знаки $>$ и $<$, а для нестрогих — знаки $\geq$ и $\leq$.

Задача 2. Сравнить числа: 1) $\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}}$ и $\left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}}$ и $(0,86)^{\sqrt{2}}$.

Δ 1) Так как $\frac{17}{18} < 1$ и $\frac{18}{17} > 1$, то $\frac{17}{18} < \frac{18}{17}$. Возведя это неравенство в отрицательную степень $\left(-\frac{1}{3}\right)$, получим $\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

2. Сравним основания степени. Так как $\frac{6}{7} = 0,857\dots$ то $\frac{6}{7} < 0,86$. Возведя это неравенство в положительную степень $\sqrt{2}$, получим $\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}} < 0,86^{\sqrt{2}}$. ▲

Задача 3. Решить уравнение $10^x = 1$.

Δ Число $x = 0$ является корнем этого уравнения, так как $10^0 = 1$. Покажем, что других корней нет.

Запишем данное уравнение в виде $10^x = 1^x$.

Если $x > 0$, то $10^x > 1^x$ и, следовательно, уравнение не имеет положительных корней.

Если $x < 0$, то $10^x < 1^x$ и, следовательно, уравнение не имеет отрицательных корней.

Таким образом, $x = 0$ — единственный корень уравнения $10^x = 1$. ▲

Аналогично доказывается, что уравнение $a^x = 1$, где $a > 0$, $a \neq 1$, имеет единственный корень $x = 0$. Отсюда следует, что равенство

$$a^x = a^y, \quad (3)$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, верно только при $x = y$.

○ Умножая равенство (3) на a^{-y} , получаем $a^{x-y} = 1$, откуда $x = y$. ●

Задача 4. Решить уравнение $3^{2x-1} = 9$.

△ $3^{2x-1} = 3^2$, откуда $2x - 1 = 2$, $x = 1,5$. ▲

Рассмотрим уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Можно доказать, что это уравнение имеет единственный корень x_0 . Число x_0 называют *логарифмом числа b по основанию a* и обозначают $\log_a b$. Например, корнем уравнения $3^x = 9$ является число 2, т. е. $\log_3 9 = 2$. Точно так же $\log_2 16 = 4$, так как $2^4 = 16$; $\log_5 \frac{1}{5} = -1$,

так как $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, так как $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$.

Логарифм числа b по основанию 10 называют *десятичным логарифмом* и обозначают $\lg b$. Например, $\lg 100 = 2$, так как $10^2 = 100$; $\lg 0,001 = -3$, так как $10^{-3} = 0,001$.

У п р а ж н е н и я

175. (Устно.) Сравнить числа:

$$1) 2^{\frac{1}{3}} \text{ и } 3^{\frac{1}{3}}; \quad 2) 5^{-\frac{4}{5}} \text{ и } 3^{-\frac{4}{5}}; \quad 3) 5^{\sqrt{3}} \text{ и } 7^{\sqrt{3}}; \quad 4) 21^{-\sqrt{2}} \text{ и } 31^{-\sqrt{2}}.$$

176. Сравнить числа:

$$1) (0,88)^{\frac{1}{6}} \text{ и } \left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}; \quad 3) (4,09)^{\frac{3}{2}} \text{ и } \left(4\frac{3}{25}\right)^{\frac{3}{2}};$$

$$2) \left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ и } (0,41)^{-\frac{1}{4}}; \quad 4) \left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}} \text{ и } \left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}.$$

177. Решить уравнение:

$$1) 6^{2x} = 6^{\frac{1}{5}}; \quad 3) 7^{1-3x} = 7^{10}; \quad 5) 4^{2+x} = 1;$$

$$2) 3^x = 27; \quad 4) 2^{2x+1} = 32; \quad 6) \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-3} = 5.$$

178. Сравнить числа:

$$1) \sqrt[7]{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2} \text{ и } \sqrt[7]{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2}; \quad 2) \sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5}\right)^3} \text{ и } \sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6} - 1\frac{1}{7}\right)^3}.$$

Решить уравнение (179–180).

179. 1) $3^{2-y} = 27$; 2) $3^{5-2x} = 1$; 3) $9^{\frac{1}{2}x-1} - 3 = 0$; 4) $27^{3-\frac{1}{3}y} - 81 = 0$.

180. 1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5} = 3^{5x-8}$;

3) $8^x 4^{x+13} = \frac{1}{16}$;

2) $2^{4x-9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$;

4) $\frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-7,5}$.

181. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1} = (3\sqrt{3})^x$;

3) $9^{3x+4} \sqrt{3} = \frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}}$;

2) $(\sqrt[3]{2})^{x-1} = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x}$;

4) $\frac{8}{(\sqrt{2})^x} = 4^{3x-2} \sqrt{2}$.

182. Вычислить:

1) $\log_7 49$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 4) $\log_8 \frac{1}{27}$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

Вычислить (183–184).

183. 1) $(0,175)^0 + (0,36)^{-2} - 1^{\frac{4}{3}}$;

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + 4 \cdot 379^0$;

2) $1^{-0,43} - (0,008)^{\frac{1}{3}} + (15,1)^0$;

4) $(0,125)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{8}{4}\right)^2 - (1,85)^0$.

184. 1) $9,3 \cdot 10^{-6} : (3,1 \cdot 10^{-5})$;

3) $8,1 \cdot 10^{16} \cdot 2 \cdot 10^{-14}$;

2) $1,7 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^7$;

4) $6,4 \cdot 10^5 : (1,6 \cdot 10^7)$;

$$5) 2 \cdot 10^{-1} + \left(6^0 - \frac{1}{6}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1};$$

$$6) 3 \cdot 10^{-1} - \left(8^0 - \frac{1}{8}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-1}.$$

185. Найти значение выражения:

$$1) \left(\frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}}}{\frac{1}{x^6}} \right)^{-2} \text{ при } x = \frac{7}{9};$$

$$2) \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{9}}}{a^{\frac{2}{9}}} \right)^{-3} \text{ при } a = 0,1.$$

186. Упростить выражение:

$$1) (\sqrt[3]{125x} - \sqrt[3]{8x}) - (\sqrt[3]{27x} - \sqrt[3]{64x});$$

$$2) (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{16x}) + (\sqrt[4]{81x} - \sqrt[4]{625x});$$

$$3) \left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a} \right) : \frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}};$$

$$4) \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) : (\sqrt{x^2 - y^2} - x).$$

187. Решить уравнение:

$$1) 7^{5x-1} = 49;$$

$$3) \left(\frac{1}{7} \right)^{3x+2} = 7^{2x};$$

$$2) (0,2)^{1-x} = 0,04;$$

$$4) 3^{5x-7} = \left(\frac{1}{3} \right)^{2x}.$$

188. Вычислить:

$$1) \left(\frac{1}{16} \right)^{-0,75} + 10000^{0,25} - \left(7 \frac{19}{32} \right)^{\frac{1}{5}}; \quad 3) 27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3 \frac{3}{8} \right)^{-\frac{1}{3}};$$

$$2) (0,001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}}; \quad 4) (-0,5)^{-4} - 625 - \left(2 \frac{1}{4} \right)^{-1\frac{1}{2}}.$$

189. При каких значениях x имеет смысл выражение:

$$1) \sqrt[4]{x^2 - 4};$$

$$3) \sqrt[6]{\frac{x-2}{x+3}};$$

$$5) \sqrt[8]{x^3 - x};$$

$$2) \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6};$$

$$4) \sqrt[4]{x^2 - 5x + 6};$$

$$6) \sqrt[6]{x^3 - 5x^2 + 6x}?$$

Проверьте себя!

1. Вычислить:

$$1) 3^{-5} : 3^{-7} - 2^{-2} \cdot 2^4 + \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{-1} \right)^3; \quad 2) \sqrt[3]{3^{10} \cdot 32} - \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}};$$

$$3) 25^{\frac{3}{2}} \cdot 25^{-1} + (5^3)^{\frac{2}{3}} : 5^3 - 48^{\frac{2}{3}} : 6^{\frac{2}{3}}.$$

2. Записать числа в стандартном виде и выполнить их умножение и деление: 8600 и 0,0078.

3. Упростить выражение:

$$1) \frac{3x^{-9} \cdot 2x^5}{x^{-4}}; \quad 2) (x^{-1} + y^{-1}) \left(\frac{1}{xy} \right)^{-2}.$$

4. Упростить выражение $\frac{a^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{3}{4}}}$ и найти его числовое значение при $a = 81$.

5. Сравнить числа: $(0,78)^{\frac{2}{3}}$ и $(0,67)^{\frac{2}{3}}$; $(3,09)^{\frac{1}{3}}$ и $(3,08)^{\frac{1}{3}}$.

190. Упростить выражение:

$$1) \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{7}{4}}}{\frac{1}{a^4} - a^{-\frac{3}{4}}};$$

$$3) \frac{b^{\frac{5}{4}} + 2b^{\frac{1}{4}} + b^{-\frac{3}{4}}}{b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{1}{4}}};$$

$$5) \frac{\sqrt{a^3 b^{-1}} - \sqrt{a^{-1} b^3}}{\sqrt{ab^{-1}} - \sqrt{a^{-1} b}};$$

$$2) \frac{a^{\frac{4}{3}} - a^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{a^3} - a^{-\frac{2}{3}}};$$

$$4) \frac{a^{-\frac{3}{4}} b^{-2} - a^{-2} b^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{5}{3}} b^{-2} - b^{-\frac{5}{3}} a^{-2}};$$

$$6) \frac{a^{\frac{3}{4}} b^{-\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}}}{\frac{1}{a^4} b^{-\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}}}.$$

? ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ III

Вычислить (1–13).

1. $(-8)^2 - (-5)^3 - (12)^{-1}$.

A) $188\frac{11}{12}$; B) $-61\frac{1}{12}$; C) $189\frac{1}{12}$; D) $61\frac{1}{12}$; E) $188\frac{1}{12}$.

2. $(-0,2)^{-3} + (0,2)^{-2} - (-2)^{-2}$.

A) $-150\frac{1}{4}$; B) $-100\frac{1}{4}$; C) $99\frac{1}{4}$; D) 11,25; E) -149,75.

3. $\frac{\sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{-250}}.$
 A) $\sqrt[3]{2};$ B) 1; C) -1; D) $\frac{9}{5};$ E) $7\sqrt[3]{2}.$
4. $\sqrt[4]{\frac{(4,15)^3 - (1,61)^3}{2,54} + 4,15 \cdot 1,61}.$
 A) 3,4; B) 5,76; C) 24; D) 2,4; E) 2,6.
5. $\sqrt[3]{\frac{(2,08)^3 + (2,016)^3}{4,096} - 2,08 \cdot 2,016}.$
 A) 0,064; B) 4,096; C) 1,6; D) 0,8; E) 0,16.
6. $\sqrt{2\sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt[4]{9 - 4\sqrt{2}}.$
 A) $\sqrt{7};$ C) $3 - 2\sqrt{2};$ E) правильный ответ не приведен.
 B) $2\sqrt{15};$ D) 7;
7. $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7 + 4\sqrt{3}}.$
 A) -1; B) 1; C) $3 + 2\sqrt{3};$ D) $5 + 3\sqrt{3};$ E) $3 - 2\sqrt{3}.$
8. $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}}.$
 A) $3 - \sqrt{2};$ B) -1; C) 1; D) $2\sqrt{2};$ E) $2 - \sqrt{2}.$
9. $\frac{\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} \cdot (3 - \sqrt{2})}{11 - 6\sqrt{2}}.$
 A) $5 - \sqrt{2};$ C) -1; E) правильный ответ не приведен.
 B) $5\sqrt{2};$ D) 1;
10. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}.$
 A) 8; B) $\sqrt{2};$ C) $2\sqrt{2};$ D) -2; E) 2.
11. $\sqrt[4]{8\sqrt[4]{16}}.$
 A) 2; B) -2; C) $4\sqrt{2};$ D) 8; E) $\sqrt[4]{8}.$

12. $\sqrt[3]{-4 \cdot \sqrt[3]{8}}$.

- A) 2; B) -2; C) $\sqrt[3]{-4}$; D) $\sqrt[6]{32}$; E) $\sqrt[3]{4}$.

13. $\frac{\sqrt[3]{98} \cdot \sqrt[3]{-112}}{\sqrt[3]{500}}$.

- A) $-\sqrt[3]{4}$; B) 2,84; C) -2,8; D) -1,4; E) $\sqrt[3]{4}$.

14. Найти числовое значение выражения $\sqrt{a} : \sqrt[6]{a}$ при $a = 125$.

- A) -25; B) 15; C) -5; D) 5; E) 25.

15. Найти числовое значение выражения $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ при $a = 0,04$.

- A) 0,08; B) $\sqrt[3]{0,4}$; C) 0,4; D) -0,2; E) 0,2.

16. Упростить выражение $(a^5)^{-\frac{4}{5}} \cdot (b^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}}$.

- A) $a^{-4} \cdot b^{\frac{1}{2}}$; B) $a^4 \cdot b^{-\frac{1}{2}}$; C) $a^5 \cdot b^2$; D) $a^{-5} \cdot b^{-2}$; E) $a^{-4} \cdot b^2$.

17. Упростить выражение $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot (a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}})$.

- A) $a + b$; B) $a - b$; C) $a^3 + b^3$; D) $a^3 - b^3$; E) $(a + b)^{\frac{1}{3}}$.

18. Упростить выражение $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}) : \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} - 2 \right)$.

- A) $\sqrt[3]{ab}$; B) $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$; C) $\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$; D) $\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{ab}}$; E) $\frac{ab}{a-b}$.

19. Сравнить числа $a = \left(\frac{7}{12} \right)^{-\frac{1}{4}}$ и $b = (0,58)^{-\frac{1}{4}}$.

- A) $b = a + 0,5$; B) $a = b + 0,8$; C) $b < a$; D) $b > a$; E) $b = a$.

20. Сравнить числа $a = (3,09)^{\sqrt{2}}$ и $b = \left(3\frac{10}{11} \right)^{\sqrt{2}}$.

- A) $b = a - 0,09$; B) $a = b - 0,09$; C) $a > b$; D) $a = b$; E) $a < b$.

21. Расположить числа $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{3}$, $c = \sqrt[6]{7}$ в порядке возрастания.

A) $c < a < b$; C) $b < a < c$; E) $b < c < a$.

B) $c < b < a$; D) $a < b < c$;

22. Расположить числа $a = \sqrt[3]{2}$, $b = \sqrt[4]{3}$, $c = \sqrt[5]{5}$ в порядке убывания.

A) $a > b > c$; C) $c > a > b$; E) $c > b > a$.

B) $b > c > a$; D) $b > a > c$;



Исторические сведения

Степень с рациональным показателем введена *И. Ньютоном*.

Понятие степени a^a , $a > 0$ для произвольного действительного a дано *Л. Эйлером* в его книге «Введение в анализ».

Абу Райхан Беруни в своем сочинении «Канон Масуда» писал: «отношение длины окружности к ее диаметру является иррациональным числом».

Уже в Древней Греции было доказано, что «диагональ квадрата со стороной, равной 1, не может быть выражена рациональным числом».

В V–IV вв. до н. э. античные ученые доказали, что число $\sqrt{n}$ является иррациональным числом для любого натурального числа n , не являющегося точным квадратом.

В своем трактате «Ключ арифметики» аль-Каши предложил общий метод извлечения корня из натурального числа. Корень $\sqrt[n]{a^n + r}$ он выражал приближенной формулой $\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$, где a — натуральное число и $r < (a+1)^n - a^n$.

Для нахождения более точного значения корня аль-Каши предлагал умножать на соответствующую степень 10: $\sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{10^{mn} \cdot N}}{10^m}$.

Для извлечения корня из дроби использовалась формула $\sqrt[n]{\frac{M}{N}} = \frac{\sqrt[n]{M \cdot N^{n-1}}}{N}$. Наряду с этим аль-Каши предлагал формулу для произведения корней с разными степенями:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[kn]{a^k \cdot b^n} = \sqrt[kn]{a^k \cdot b^n}.$$



$$V = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{V}$$

$$x = V^{\frac{1}{3}}$$



$$S = \pi r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

§ 14

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ



Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число y , то говорят, что на этом множестве задана *функция* $y(x)$. При этом x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а y — *зависимой переменной* или *функцией*.

Вы знакомы с линейной функцией $y = kx + b$ и квадратичной функцией $y = ax^2 + bx + c$.

Для этих функций значение аргумента может быть любым действительным числом.

Рассмотрим теперь функцию, которая каждому неотрицательному числу x сопоставляет число $\sqrt{x}$, т. е. функцию $y = \sqrt{x}$. Для этой функции аргумент может принимать только неотрицательные значения: $x \geq 0$. В этом случае говорят, что функция определена на множестве всех неотрицательных чисел, и это множество называют областью определения функции $y = \sqrt{x}$.

Вообще *областью определения* функции называют множество всех значений, которые может принимать ее аргумент.

Например, функция, заданная формулой $y = \frac{1}{x}$, определена при $x \neq 0$, т. е. область определения этой функции — множество всех действительных чисел, отличных от нуля.

Если функция задана формулой, то принято считать, что она определена при всех тех значениях аргумента, при которых эта формула имеет смысл, т. е. выполнимы все действия, указанные в выражении, стоящем в правой части формулы.

Найти область определения функции, заданной формулой, — это значит найти все значения аргумента, при которых формула имеет смысл.

Задача 1. Найти область определения функции:

1) $y(x) = 2x^2 + 3x + 5$;

3) $y(x) = \frac{1}{x+2}$;

2) $y(x) = \sqrt{x-1}$;

4) $y(x) = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}$.

Δ 1) Так как выражение $2x^2 + 3x + 5$ имеет смысл при любом x , то функция определена при всех значениях x .

Ответ: x — любое число.

2) Выражение $\sqrt{x-1}$ имеет смысл при $x-1 \geq 0$, т. е. функция определена при $x \geq 1$.

Ответ: $x \geq 1$.

3) Выражение $y(x) = \frac{1}{x+2}$ имеет смысл при $x+2 \neq 0$, т. е. функция определена при $x \neq -2$.

Ответ: $x \neq -2$.

4) Выражение $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}$ имеет смысл при $\frac{x+2}{x-2} \geq 0$. Решая это неравенство, получаем (рис. 28): $x \leq -2$ или $x > 2$, т. е. функция определена при $x \leq -2$ и при $x > 2$.

Ответ: $x \leq -2, x > 2$. $\blacktriangle$

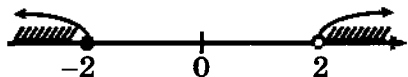


Рис. 28

Напомним, что *графиком функции* называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной из области определения этой функции, а ординаты — соответствующим значениям функции.

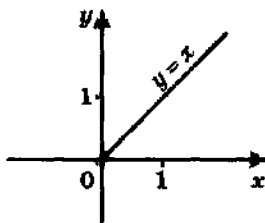


Рис. 29

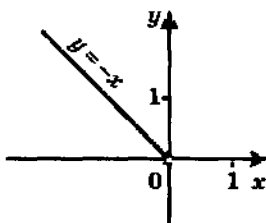


Рис. 30

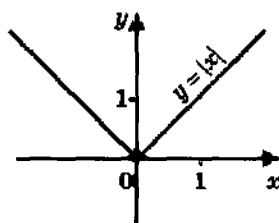


Рис. 31

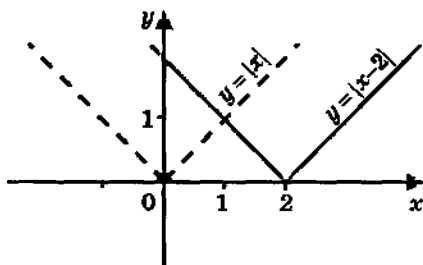


Рис. 32

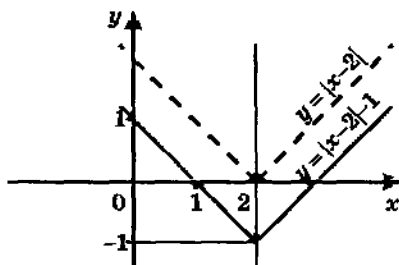


Рис. 33

Задача 2. Найти область определения и построить график функции $y = |x|$.

△ Напомним, что

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, выражение $|x|$ имеет смысл при любом действительном значении x , т.е. областью определения функции $y = |x|$ является множество всех действительных чисел.

Если $x \geq 0$, то $|x| = x$, и поэтому при $x \geq 0$ графиком функции $y = |x|$ является биссектриса первого координатного угла (рис. 29).

Если $x < 0$, то $|x| = -x$, т. е. для отрицательных x графиком функции $y = |x|$ является биссектриса второго координатного угла (рис. 30).

График функции $y = |x|$ изображен на рис. 31. ▲

Заметим, что $|-x| = |x|$ для любого x , поэтому график функции $y = |x|$ симметричен относительно оси ординат.

Задача 3. Построить график функции $y = |x - 2| - 1$.

△ График функции $y = |x - 2|$ получается из графика функции $y = |x|$ сдвигом вдоль оси Ox на 2 единицы вправо (рис. 32).

Для получения графика функции $y = |x - 2| - 1$ достаточно сдвинуть график функции $y = |x - 2|$ на единицу вниз (рис. 33). ▲

У п р а ж н е н и я

191. Функция задана формулой $y(x) = x^2 - 4x + 5$.

1) Найти $y(-3)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(2)$;

2) Найти значение x , если $y(x) = 1$, $y(x) = 5$, $y(x) = 10$, $y(x) = 17$.

192. Функция задана формулой $y(x) = \frac{x+5}{x-1}$.

1) Найти $y(-2)$, $y(0)$, $y(\frac{1}{2})$, $y(3)$.

2) Найти значение x , если $y(x) = -3$, $y(x) = -2$, $y(x) = 13$, $y(x) = 19$.

Найти область определения функции (**193–194**).

193. (Устно).

1) $y = 4x^2 - 5x + 1$;

4) $y = \frac{3}{5-x^2}$;

2) $y = 2 - x - 3x^2$;

5) $y = \sqrt[4]{6-x}$;

3) $y = \frac{2x-3}{x-3}$;

6) $y = \sqrt{\frac{1}{x+7}}$.

194. 1) $y = \frac{2x}{x^2-2x-3}$;

3) $y = \sqrt[8]{3x^2-2x+5}$;

2) $y = \sqrt[6]{x^2-7x+10}$;

4) $y = \sqrt[6]{\frac{2x+4}{3-x}}$.

195. Функция задана формулой $y(x) = |2-x| - 2$.

1) Найти $y(-3)$, $y(-1)$, $y(1)$, $y(3)$.

2) Найти значение x , если $y(x) = -2$, $y(x) = 0$, $y(x) = 2$, $y(x) = 4$.

196. Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$;

5) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2+4x-5}{x-2}}$;

2) $y = \sqrt[4]{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

6) $y = \sqrt[6]{x + \sqrt{1+x}}$;

3) $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

7) $y = \sqrt[4]{-x} + \sqrt{x+2}$;

4) $y = \sqrt{(x+1)(x-1)(x-4)}$;

8) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x+1}}$.

197. Принадлежит ли точка $(-2; 1)$ графику функции:

1) $y = 3x^2 + 2x + 29$;

3) $y = \frac{x^2+3}{x-1}$;

2) $y = |4 - 3x| - 9$;

4) $y = |\sqrt{2-x} - 5| - 2$?

198. Построить график функции:

1) $y = |x+3| + 2$;

3) $y = 2|x| + 1$;

5) $y = |x| + |x-2|$;

2) $y = -|x|$;

4) $y = 1 - |1-2x|$;

6) $y = |x+1| - |x|$.

199. График функции $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(0; 1)$, $B(1; 2)$, $C(\frac{5}{6}; 1)$.

1) Найти a, b, c .

2) При каких значениях x $y(x) = 0$?

3) Построить график функции.

§ 15

ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Вы знакомы с функциями $y = x$ и $y = x^2$. Эти функции являются частными случаями *степенной функции*, т. е. функции

$$y = x^r, \quad (1)$$

где r — заданное число.

Пусть r — натуральное число, $r = n = 1, 2, 3, \dots$. В этом случае получим степенную функцию $y = x^n$ с натуральным показателем.

Функция $y = x^n$ определена на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$, т. е. при $x \in \mathbb{R}$. Если в формуле (1) $r = -2k$, $k \in \mathbb{N}$, приходим

к функции $y = x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$. Эта функция определена при значениях x , отличных от нуля. Ее график симметричен относительно оси Oy . Если $r = -(2k - 1)$, $k \in N$, приходим к функции $y = x^{-(2k-1)} = \frac{1}{x^{2k-1}}$. Свойства функции $y = x^{-(2k-1)} = \frac{1}{x^{2k-1}}$ аналогичны свойствам функции $y = \frac{1}{x}$. Пусть p и q — натуральные числа и $r = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Область определения функции $y = \sqrt[q]{x^p}$ зависит от четности p и q . Например, функции $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = \sqrt[3]{x}$ определены для любого $x \in R$. Функция $y = \sqrt[4]{x^3}$ определена при неотрицательных значениях x , т. е. при $x \geq 0$.

Из курса алгебры 8-го класса известно, что алгебраические операции над иррациональными числами определяются таким образом, чтобы свойства этих операций над рациональными числами полностью сохранялись и для иррациональных чисел. Так как для каждого иррационального числа можно найти его приближение рациональным числом с любой степенью точности, то на практике действия над иррациональными числами заменяются действиями над их рациональными приближениями.

Пусть $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$ — рациональные приближения иррационального числа r . Тогда, если x — положительное число, то числа $x^{r_1}, x^{r_2}, \dots, x^{r_k}, \dots$ будут последовательными рациональными приближениями некоторого действительного числа, которое называется *степенью с иррациональным показателем r* и обозначается x^r .

Таким образом, при $x > 0$ можно определить функцию $y = x^r$ с произвольным действительным показателем r .

Степенная функция определена для тех значений x , при которых формула (1) имеет смысл. Например, областью определения функций $y = x$ и $y = x^2$ ($r = 1$ и $r = 2$) является множество всех действительных чисел; областью определения функции $y = \frac{1}{x}$ ($r = -1$) является множество всех действительных чисел, не равных нулю; областью определения функции $y = \sqrt{x}$ ($r = \frac{1}{2}$) является множество всех неотрицательных действительных чисел.



Напомним, что функция $y(x)$ называется *возрастающей* на некотором промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. для любых x_1, x_2 , принадлежащих данному промежутку, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $y(x_2) > y(x_1)$.

Функция $y(x)$ называется *убывающей* на некотором промежутке, если для любых x_1, x_2 принадлежащих данному промежутку, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $y(x_2) < y(x_1)$.

Например, функция $y = x$ возрастает на числовой оси, функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $x \geq 0$ и убывает на промежутке $x \leq 0$.

Возрастание или убывание степенной функции $y = x^r$ зависит от знака показателя степени r .



Если $r > 0$, то степенная функция $y = x^r$ возрастает на промежутке $x \geq 0$.

○ Пусть $x_2 > x_1 \geq 0$. Возводя неравенство $x_2 > x_1$ в положительную степень r , получаем $x_2^r > x_1^r$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$. ●

Например, функции $y = \sqrt{x}$ и $y = x^{\frac{3}{2}}$ возрастают на промежутке $x \geq 0$. Графики этих функций изображены на рисунке 34. Из этого рисунка видно, что график функции $y = \sqrt{x}$ на промежутке $0 < x < 1$ лежит выше графика функции $y = x$, а на промежутке $x > 1$ — ниже графика функции $y = x$.

Таким же свойством обладает график функции $y = x^r$, если $0 < r < 1$.

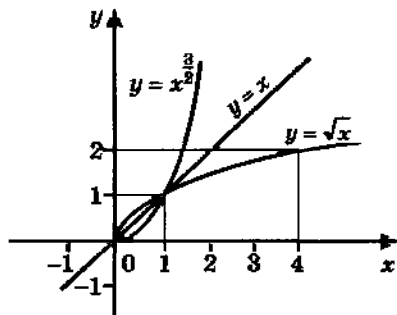


Рис. 34

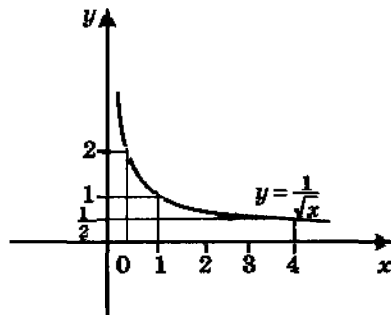


Рис. 35

График функции $y = x^{\frac{3}{2}}$ на промежутке $0 < x < 1$ лежит ниже графика функции $y = x$, а на промежутке $x > 1$ — выше графика функции $y = x$.

Таким же свойством обладает график функции $y = x^r$, если $r > 1$.

Рассмотрим теперь *случай, когда $r < 0$* .

! Если $r < 0$, то степенная функция $y = x^r$ убывает на промежутке $x > 0$.

○ Пусть $x_2 > x_1 > 0$. Возводя неравенство $x_2 > x_1$ в отрицательную степень r , по свойству неравенств, у которых левая и правая части положительны, получаем $x_2^r < x_1^r$, т. е. $y(x_2) < y(x_1)$. ●

Например, функция $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, т. е. $y = x^{-\frac{1}{2}}$ убывает на промежутке $x > 0$. График этой функции изображен на рисунке 35.

Задача 1. Решить уравнение $x^{\frac{3}{4}} = 27$.

△ Функция $y = x^{\frac{3}{4}}$ определена при $x \geq 0$. Поэтому данное уравнение может иметь только неотрицательные корни. Один такой корень есть: $x = 27^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{27^3}\right)^4 = 3^4 = 81$. Других корней нет, так как функция $y = x^{\frac{3}{4}}$ возрастает при $x \geq 0$, и поэтому если $x > 81$, то $x^{\frac{3}{4}} > 27$, если $x < 81$, то $x^{\frac{3}{4}} < 27$ (рис. 36). ▲

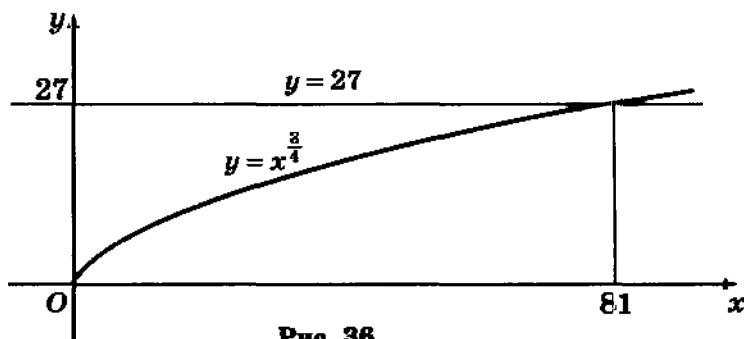


Рис. 36

Аналогично доказывается, что уравнение $x^r = b$, где $r \neq 0$, $b > 0$ всегда имеет положительный корень $x = b^{\frac{1}{r}}$, причем только один. Следовательно, функция $y = x^r$, где $r > 0$, при $x > 0$ принимает все положительные значения.

Это означает, например, что, несмотря на медленное возрастание функции $y = x^{\frac{2}{3}}$ (рис. 36), ее график как угодно далеко удалится от оси Ox и пересечет прямую $y = b$, каким бы ни было положительное число b .

Задача 2. Доказать, что функция $y = x + \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $x > 1$.

Δ Пусть $x_2 > x_1 > 1$. Покажем, что $y(x_2) > y(x_1)$. Рассмотрим разность $y(x_2) - y(x_1)$:

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2 + \frac{1}{x_2} - (x_1 + \frac{1}{x_1}) = (x_2 - x_1) \frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}.$$

Так как $x_2 > x_1$, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, то $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 x_2 > 1$, $x_1 x_2 > 0$. Поэтому $y(x_2) - y(x_1) > 0$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$. **▲**

У п р а ж н е н и я

200. Построить график функции и найти промежутки возрастания и убывания функции:

- | | | |
|-------------------|--------------------|----------------------|
| 1) $y = 2x + 3$; | 3) $y = x^2 + 2$; | 5) $y = (1 - x)^2$; |
| 2) $y = 1 - 3x$; | 4) $y = 3 - x^2$; | 6) $y = (2 + x)^2$. |

201. (Устно.) Возрастает или убывает на промежутке $x > 0$ функция:

- 1) $y = x^{\frac{3}{7}}$; 2) $y = x^{-\frac{3}{4}}$; 3) $y = x^{-\sqrt{2}}$; 4) $y = x^{\sqrt{3}}$?

202. Нарисовать эскиз графика функции при $x > 0$:

- 1) $y = x^{\frac{8}{2}}$; 2) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 3) $y = x^{-\frac{8}{2}}$; 4) $y = x^{-\frac{2}{3}}$.

203. Найти положительный корень уравнения:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 3$; 3) $x^{-\frac{1}{2}} = 2$; 5) $x^{\frac{5}{6}} = 32$;

2) $x^{\frac{1}{4}} = 2$; 4) $x^{-\frac{1}{4}} = 2$; 6) $x^{\frac{4}{5}} = 81$.

204. Построить на миллиметровой бумаге график функции $y = \sqrt[4]{x}$. Найти по графику приближенно:

1) значения x , при которых $y = 0,5; 1; 4; 2,5$;

2) значения $\sqrt[4]{1,5}; \sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{2,5}; \sqrt[4]{3}$.

205. Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = x^{\frac{4}{3}}$ и $y = 625$; 3) $y = x^{\frac{3}{2}}$ и $y = 216$;

2) $y = x^{\frac{6}{5}}$ и $y = 64$; 4) $y = x^{\frac{7}{8}}$ и $y = 128$.

206. Доказать, что функция:

1) $y = x + \frac{1}{x}$ убывает на интервале $0 < x < 1$;

2) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ убывает на промежутке $x \geq 0$ и возрастает на промежутке $x \leq 0$;

3) $y = x^3 - 3x$ возрастает на промежутках $x \leq -1$ и $x \geq 1$, убывает на отрезке $-1 \leq x \leq 1$;

4) $y = x - 2\sqrt{x}$ возрастает на промежутке $x \geq 1$ и убывает на отрезке $0 \leq x \leq 1$.

207. Построить график и найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2, & \text{если } x > -1; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 1, \\ 2 - x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Вы знаете, что графики функций $y = x^2$ и $y = |x|$ (рис. 37 и 38) симметричны относительно оси ординат. Такие функции называют *четными*.



Функция $y(x)$ называется *четной*, если

$$y(-x) = y(x)$$

для любого x из области определения этой функции.

Например, функции $y = x^4$ и $y = \frac{1}{x^2}$ — четные, так как $(-x)^4 = x^4$ для любого x и $\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$ для любого $x \neq 0$.

Задача 1. Построить график функции $y = x^3$.

Δ 1) Область определения функции $y = x^3$ — множество всех действительных чисел.

2) Значения функции $y = x^3$ положительны при $x > 0$, отрицательны при $x < 0$; $y = 0$ при $x = 0$.

3) Докажем, что график функции $y = x^3$ симметричен относительно начала координат.

○ Пусть точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = x^3$, т. е. $y_0 = x_0^3$. Точка, симметричная точке $(x_0; y_0)$ относительно начала координат, имеет координаты $(-x_0; -y_0)$. Эта точка также принадлежит графику функции $y = x^3$, так как умножая обе части верного равенства $y_0 = x_0^3$ на -1 , получаем $-y_0 = -x_0^3$, или $-y_0 = (-x_0)^3$. ●

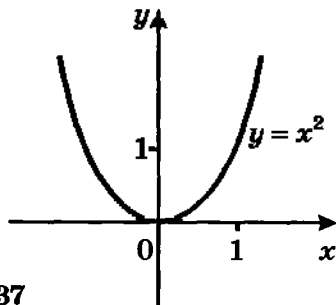


Рис. 37

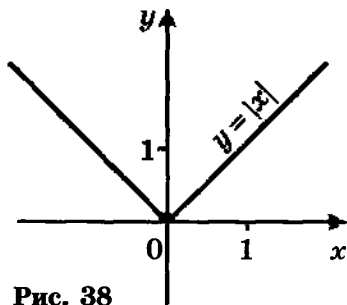


Рис. 38

Это свойство позволяет для построения графика функции $y = x^3$ построить сначала график для $x \geq 0$, а затем отразить его симметрично относительно начала координат.

4) Функция $y = x^3$ возрастает на всей области определения. Это следует из свойства возрастания степенной функции с положительным основанием при $x \geq 0$ и симметрии графика относительно начала координат.

5) Составив таблицу значений функции $y = x^3$ для некоторых значений $x \geq 0$ (например, $x = 0, 1, 2, 3$), построим часть графика для значений $x \geq 0$ и затем с помощью симметрии — ту его часть, которая соответствует отрицательным значениям x (рис. 39). ▲

Функции, графики которых симметричны относительно начала координат, называются *нечетными*. Таким образом, $y = x^3$ — нечетная функция.

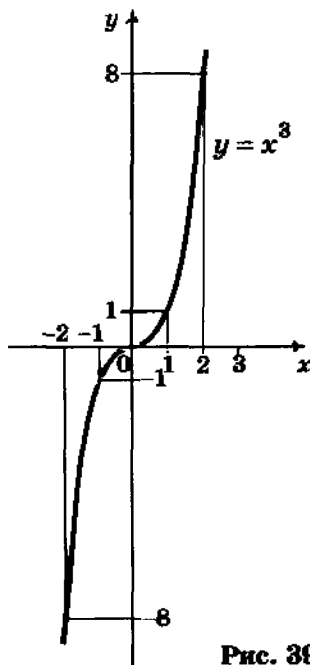


Рис. 39



Функция $y(x)$ называется *нечетной*, если

$$y(-x) = -y(x)$$

для любого x из области определения этой функции.

Например, функции $y = x^5$, $y = \frac{1}{x^3}$ — нечетные, так как $(-x)^5 = -x^5$ для любого x и $\frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3}$ для любого $x \neq 0$.

Отметим, что и у четной, и у нечетной функции область определения симметрична относительно начала координат.

Существуют функции, которые не обладают свойствами четности или нечетности. Например, покажем, что функция $y = 2x + 1$ не является четной и не является нечетной. Если бы эта функция была четной, то равенство $2(-x) + 1 = 2x + 1$ выполнялось бы для всех x , но при $x = 1$ это равенство неверно: $-1 \neq 3$. Если бы эта функция была нечетной, то тогда при всех значениях x выполнялось бы равенство $2(-x) + 1 = -(2x + 1)$, но, например, при $x = 2$ это равенство неверно: $-3 \neq -5$.

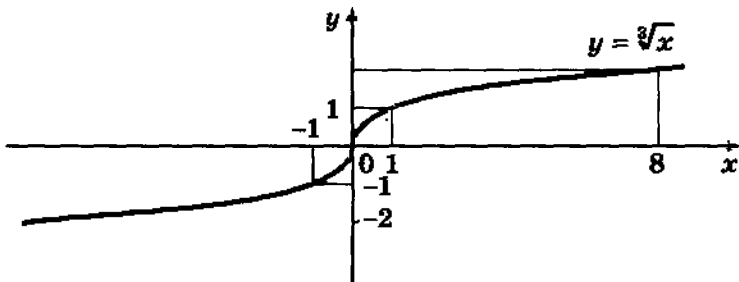


Рис. 40

Задача 2. Построить график функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Δ 1) Область определения — все действительные числа.

2) Функция является нечетной, так как $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ для любого x .

3) При $x \geq 0$ функция возрастает по свойству возрастания степенной функции с положительным показателем, так как $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ при $x \geq 0$.

4) При $x > 0$ значения функции положительны; $y(0) = 0$.

5) Найдя несколько точек, принадлежащих графику, например, точки $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(8; 2)$, построим часть графика для значений $x \geq 0$ и затем с помощью симметрии — часть графика для значений $x < 0$, (рис. 40). ▲

Отметим, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ определена при всех x , а функция $y = x^{\frac{1}{3}}$ только при $x \geq 0$.

У п р а ж н е н и я

Выяснить, является ли функция четной или нечетной (208–209).

208. 1) $y = 2x^4$; 2) $y = 3x^5$; 3) $y = x^2 + 3$; 4) $y = x^3 - 2$.

209. 1) $y = x^{-4}$; 3) $y = x^4 + x^2$; 5) $y = x^2 - x + 1$;

2) $y = x^{-3}$; 4) $y = x^3 + x^5$; 6) $y = \frac{1}{x+1}$.

210. Построить эскиз графика функции:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^5$; 3) $y = -x^2 + 3$; 4) $y = \sqrt[5]{x}$.

211. Показать, что функция не является четной и не является нечетной:

1) $y = \frac{x+2}{x-3}$;

2) $y = \frac{x^2+x-1}{x+4}$.

212. Выяснить, является ли функция четной или нечетной:

1) $y = x^4 + 2x^2 + 3$;

4) $y = x^4 + |x|$;

2) $y = x^3 + 2x + 1$;

5) $y = |x| + x^3$;

3) $y = \frac{3}{x^3} + \sqrt[3]{x}$;

6) $y = \sqrt[3]{x-1}$.

213. Используя симметрию, построить график четной функции:

1) $y = x^2 - 2|x| + 1$;

2) $y = x^2 - 2|x|$.

214. Используя симметрию, построить график нечетной функции:

1) $y = x|x| - 2x$;

2) $y = x|x| + 2x$.

215. Выяснить свойства функции и построить ее график:

1) $y = \sqrt{x-5}$;

4) $y = 1 - x^4$;

2) $y = \sqrt{x} + 3$;

5) $y = (x+1)^3$;

3) $y = x^4 + 2$;

6) $y = x^3 - 2$.

216. Построить график функции:

1) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 0, \\ x^3, & \text{если } x < 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x^3, & \text{если } x > 0, \\ x^2, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$

Определить, при каких значениях аргумента значения функции положительны. Указать промежутки возрастания и убывания.

217. Построить график функции y при $x > 0$, если:

1) $y = x$; 2) $y = x^2$; 3) $y = x^2 + x$; 4) $y = x^2 - x$.

Достроить график каждой из функций для $x < 0$ так, чтобы построенная линия была графиком: а) четной функции; б) нечетной функции. Задать формулой каждую из полученных функций.

218. Записать уравнение оси симметрии каждой функции:

1) $y = (x + 1)^6$;

2) $y = x^6 + 1$.

219. Указать координаты центра симметрии графика функции:

1) $y = x^3 + 1$;

2) $y = (x + 1)^3$.

§ 17

ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$

Задача 1. Построить график функции $y = \frac{1}{x}$.

Δ 1) Область определения — все действительные числа, кроме нуля.

2) Функция является нечетной, так как $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$.

3) Функция убывает на промежутке $x > 0$ по свойству степенной функции с отрицательным показателем, так как $\frac{1}{x} = x^{-1}$.

4) При $x > 0$ функция принимает положительные значения.

5) Найдя несколько точек, принадлежащих графику, например, точки $(\frac{1}{3}; 3)$, $(\frac{1}{2}; 2)$, $(1; 1)$, $(2; \frac{1}{2})$, построим часть графика для значений $x > 0$ и затем с помощью симметрии — его часть для значений $x < 0$ (рис. 41). ▲

График функции $y = \frac{1}{x}$ называют *гиперболой*. Она состоит из двух частей, называемых *ветвями гиперболы*. Одна ветвь расположена в первом квадранте, а другая — в третьем.

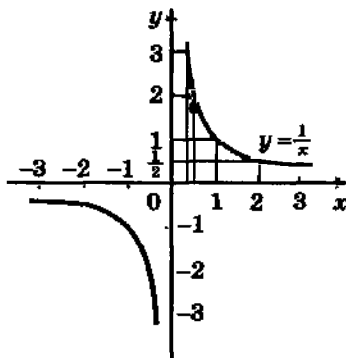


Рис. 41

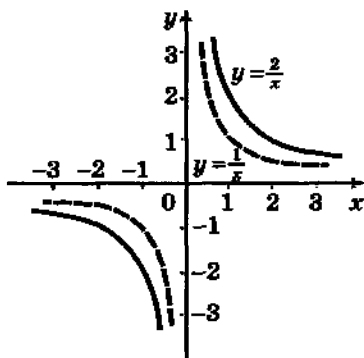


Рис. 42

Задача 2. Построить график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k=2$ и $k=-2$.

△ Заметим, что при одних и тех же значениях аргумента значения функции $y = \frac{2}{x}$ получаются умножением на 2 значений функции $y = \frac{1}{x}$. Это значит, что график функции $y = \frac{2}{x}$ получается растяжением графика функции $y = \frac{1}{x}$ от оси абсцисс вдоль оси ординат в 2 раза (рис. 42).

Значения функции $y = -\frac{2}{x}$ отличаются от соответствующих значений функции $y = \frac{2}{x}$ только знаком. Следовательно, график функции $y = -\frac{2}{x}$ симметричен графику функции $y = \frac{2}{x}$ относительно оси абсцисс (рис. 43) ▲

График функции $y = \frac{k}{x}$ при любом $k \neq 0$ также называют *гиперболой*.

Гипербола имеет две ветви, которые расположены в первом и третьем квадрантах, если $k > 0$, и во втором и четвертом квадрантах, если $k < 0$.

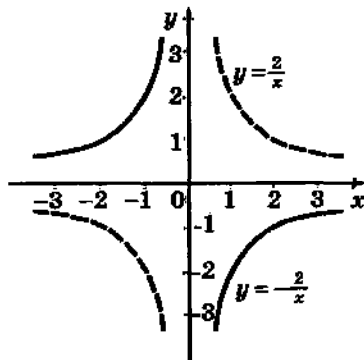


Рис. 43

Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, обладает такими же свойствами, что и функция $y = \frac{1}{x}$, а именно, эта функция:

- 1) определена при $x \neq 0$;
- 2) принимает все действительные значения, кроме нуля;
- 3) нечетная;
- 4) принимает положительные значения при $x > 0$ и отрицательные — при $x < 0$;
- 5) убывает на промежутках $x < 0$ и $x > 0$.

Если $k < 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ обладает свойствами 1–3, а свойства 4–5 формулируются так:

- 4) принимает положительные значения при $x < 0$ и отрицательные значения при $x > 0$;
- 5) возрастает на промежутках $x < 0$ и $x > 0$.

Говорят, что функция $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ выражает *обратную пропорциональную зависимость* между x и y . Такая зависимость между величинами часто встречается в физике, технике и т. д.

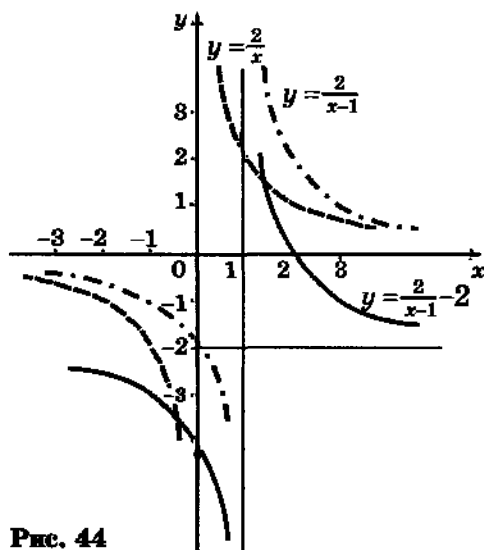


Рис. 44

Например, при равномерном движении по окружности с постоянной по модулю скоростью v тело движется с центростремительным ускорением $a = \frac{v^2}{r}$, где r — радиус окружности, т. е. в этом случае ускорение обратно пропорционально радиусу окружности.

Задача 3. Вычислить центростремительное ускорение Луны, которая движется вокруг Земли на расстоянии $3,84 \cdot 10^8$ м, совершая один оборот за 27,3 суток.

▲ Вычислим ускорение a по

формуле $a = \frac{v^2}{r}$, где $v = \frac{C}{t}$, $C = 2\pi r$, $t = 27,3 \cdot 24 \cdot 3600$ с, $r = 3,84 \cdot 10^8$.

Тогда $a = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 3,84 \cdot 10^8}{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 2,72 \cdot 10^{-3}$.

Ответ: $2,72 \cdot 10^{-3}$ м/с². ▲

Задача 4. Построить график функции $y = \frac{2}{x-1} - 2$.

▲ График этой функции можно построить, сдвигая график функции $y = \frac{2}{x}$ (рис. 42) вдоль оси Ox вправо на единицу и вдоль оси Oy вниз на две единицы (рис. 44). ▲

У п р а ж н е н и я

220. Построить график функции $y = \frac{2}{x}$. Выяснить, при каких значениях x :

- 1) $y(x) = 4$; 2) $y(x) = -\frac{1}{2}$; 3) $y(x) > 1$; 4) $y(x) \leq 1$.

221. На одной координатной плоскости построить графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = x$. Выяснить, при каких значениях x :

- 1) графики этих функций пересекаются;
2) график первой функции лежит выше (ниже) графика второй.

222. Не строя графики функций, найти точки их пересечения:

1) $y = \frac{12}{x}$, $y = 3x$;

3) $y = \frac{2}{x}$, $y = x - 1$;

2) $y = -\frac{8}{x}$, $y = -2x$;

4) $y = \frac{6}{x+1}$, $y = x + 2$.

223. Построив графики функций, приближенно найти точки их пересечения:

1) $y = \frac{3}{x}$, $y = x + 1$;

3) $y = \frac{2}{x}$, $y = x^2 + 2$;

2) $y = -\frac{3}{x}$, $y = 1 - x$;

4) $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2 + 4x$.

224. В цилиндре под поршнем при постоянной температуре находится газ. Объем V (литров) газа при давлении p (атмосфер) вычисляется по формуле $V = \frac{12}{p}$.

1) Найти объем, занимаемый газом при 4 атм.; 5 атм.; 10 атм.

2) Вычислить, при каком давлении газ имеет объем 3 л; 5 л; 15 л.

3) Построить график зависимости объема газа от его давления.

225. Сила тока в реостате I (в амперах) вычисляется по формуле

$I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление (в омах).

1) Построить график зависимости $I(R)$ при $U = 6$.

2) По графику приближенно найти: а) силу тока при сопротивлении R , равном 6, 12, 20 Ом; б) сопротивление реостата при силе тока, равной 10, 5, 1,2 А.

226. Автомобиль движется по закруглению дороги радиусом 150 м со скоростью 60 км/ч. Найти центростремительное ускорение автомобиля. Увеличится или уменьшится центростремительное ускорение, если скорость автомобиля останется прежней, а радиус закругления дороги увеличится?

Построить график функции:

1) $y = \frac{3}{x} - 2$; 2) $y = \frac{2}{x} + 1$; 3) $y = \frac{2}{x+2} - 1$; 4) $y = \frac{3}{1-x} + 1$.

Свойства степенной функции используются при решении различных уравнений и неравенств.

Задача 1. Решить неравенство $x^5 > 32$.

△ Функция $y = x^5$ определена и возрастает при всех действительных значениях x . Так как $y(2) = 32$, то $y(x) > 32$ при $x > 2$ и $y(x) < 32$ при $x < 2$.

Ответ: $x > 2$. ▲

Задача 2. Решить неравенство $x^4 \leq 81$.

△ Функция $y = x^4$ убывает при $x \leq 0$ и возрастает при $x \geq 0$. Уравнение $x^4 = 81$ имеет два действительных корня $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Поэтому неравенство $x^4 \leq 81$ при $x \leq 0$ имеет решения $-3 \leq x \leq 0$ и при $x \geq 0$ — решения $0 \leq x \leq 3$ (рис. 45).

Ответ: $-3 \leq x \leq 3$. ▲

Задача 3. С помощью графиков решить уравнение $\frac{3}{x} = x^2 + 1$.

Построим на одной координатной плоскости графики функций $y = \frac{3}{x}$ и $y = x^2 + 1$ (рис. 46).

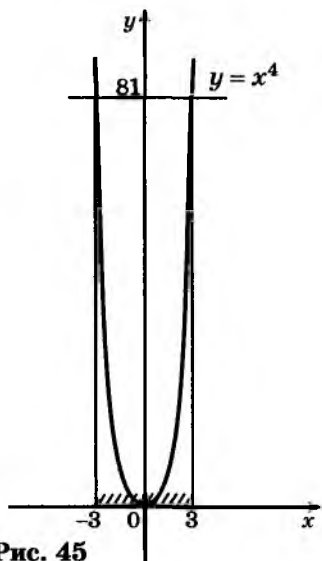


Рис. 45

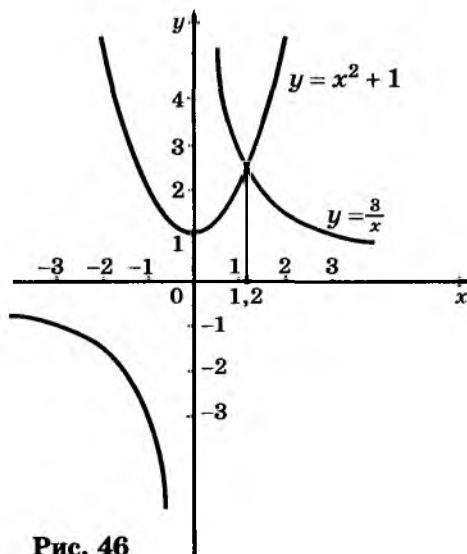


Рис. 46

Δ При $x < 0$ уравнение $\frac{3}{x} = x^2 + 1$ корней не имеет, так как $\frac{3}{x} < 0$, а $x^2 + 1 > 0$. При $x > 0$ это уравнение имеет один корень, равный абсциссе точки пересечения графиков этих функций. Из рисунка 46 видно, что $x_1 \approx 1,2$. Других положительных корней уравнение не имеет, так как при $x > x_1$ функция $y = \frac{3}{x}$ убывает, а функция $y = x^2 + 1$ возрастает, и, следовательно, графики функций при $x > x_1$ не пересекаются. По той же причине они не пересекаются при $0 < x < x_1$.

Ответ: $x \approx 1,2$. ▲

Задача 4. Решить уравнение

$$\sqrt{2 - x^2} = x. \quad (1)$$

Δ Пусть x — корень данного уравнения, т. е. x — такое число, при котором уравнение (1) обращается в верное равенство. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$2 - x^2 = x^2. \quad (2)$$

Отсюда $x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm 1$.

Итак, предположив, что уравнение (1) имеет корни, мы получили, что этими корнями могут быть только числа 1 и -1 . Проверим, являются ли эти числа корнями уравнения (1). При $x = 1$ уравнение (1) обращается в верное равенство $\sqrt{2 - 1^2} = 1$, поэтому $x = 1$ — корень уравнения (1).

При $x = -1$ левая часть уравнения (1) равна $\sqrt{2 - (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$, а правая равна -1 , т. е. $x = -1$ не является корнем уравнения (1).

Ответ: $x = 1$. ▲

В рассмотренной задаче уравнение (1) было решено с помощью возведения обеих частей этого уравнения в квадрат. При этом получилось уравнение (2).

Уравнение (1) имеет только один корень $x = 1$, а уравнение (2) — два корня $x_{1,2} = \pm 1$, т. е. при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) появляется так называемый *посторонний корень*. Это произошло потому, что при $x = -1$ уравнение (1) обращается в неверное равенство $1 = -1$, а при возведении обеих частей этого неверного равенства в квадрат получается верное равенство $1^2 = (-1)^2$.



Таким образом, при возведении обеих частей уравнения в квадрат могут появиться посторонние корни.

При решении уравнения возведением в квадрат обеих его частей необходимо делать проверку.

Уравнение (1) — пример *иррационального уравнения*. Приведем еще примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt{3-2x} = 1-x; \quad \sqrt{x+1} = 2-\sqrt{x-3}.$$

Рассмотрим решение нескольких иррациональных уравнений.

Задача 5. Решить уравнение $\sqrt{5-2x} = 1-x$.

Δ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$5-2x = x^2 - 2x + 1,$$

или $x^2 = 4$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Проверим найденные корни.

При $x = 2$ левая часть исходного уравнения равна $\sqrt{5-2 \cdot 2} = 1$, а правая часть равна $1-2 = -1$. Так как $1 \neq -1$, то $x = 2$ не является корнем исходного уравнения.

При $x = -2$ левая часть уравнения равна $\sqrt{5-2 \cdot (-2)} = 3$, правая часть равна $1-(-2) = 3$. Следовательно, $x = -2$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = -2$. $\blacktriangle$

Задача 6. Решить уравнение $\sqrt{x-2} + 3 = 0$.

Δ Запишем это уравнение в виде $\sqrt{x-2} = -3$.

Так как арифметический корень не может быть отрицательным, то это уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет. $\blacktriangle$

Задача 7. Решить уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{11-x} = 4$.

Δ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$x-1+2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{11-x}+11-x=16.$$

Приведем подобные члены и запишем уравнение в виде:

$$2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{11-x} = 6 \text{ или } \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{11-x} = 3.$$

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, получим:

$$(x-1)(11-x) = 9, \text{ или } x^2 - 12x + 20 = 0,$$

откуда $x_1 = 2$, $x_2 = 10$. Проверка показывает, что каждое из чисел 2 и 10 является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 10$. ▲

У п р а ж н е н и я

228. Решить неравенство:

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1) $x^7 > 1$; | 3) $y^3 \geq 64$; | 5) $x^4 \leq 16$; |
| 2) $x^3 \leq 27$; | 4) $y^3 < 125$; | 6) $x^4 > 625$. |

- 229.** 1) Какой может быть сторона квадрата, если его площадь больше 361 см^2 ?
2) Каким может быть ребро куба, если его объем больше 343 дм^3 ?

230. (Устно.) Показать, что число 7 является корнем уравнения:

- | | |
|-----------------------|--|
| 1) $\sqrt{x-3} = 2$; | 2) $\sqrt{x^2-13} - \sqrt{2x-5} = 3$. |
|-----------------------|--|

231. (Устно.) Решить уравнение:

- | | | | |
|---------------------|---------------------|------------------------|------------------------|
| 1) $\sqrt{x} = 3$; | 2) $\sqrt{x} = 7$; | 3) $\sqrt{2x-1} = 0$; | 4) $\sqrt{3x+2} = 0$. |
|---------------------|---------------------|------------------------|------------------------|

Решить уравнение (232–235).

- | | |
|---|------------------------------------|
| 232. 1) $\sqrt{x+1} = 2$; | 3) $\sqrt{1-2x} = 4$; |
| 2) $\sqrt{x-1} = 3$; | 4) $\sqrt{2x-1} = 3$. |
| 233. 1) $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$; | 3) $\sqrt{x^2+24} = \sqrt{11x}$; |
| 2) $\sqrt{x-2} = \sqrt{3x-6}$; | 4) $\sqrt{x^2+4x} = \sqrt{14-x}$. |
| 234. 1) $\sqrt{x+2} = x$; | 3) $\sqrt{20-x^2} = 2x$; |
| 2) $\sqrt{3x+4} = x$; | 4) $\sqrt{0,4-x^2} = 3x$. |
| 235. 1) $\sqrt{x^2-x-8} = x-2$; | 2) $\sqrt{x^2+x-6} = x-1$. |

236. Решить неравенство:

- 1) $(x-1)^3 > 1$; 3) $(2x-3)^7 \geq 1$; 5) $(3-x)^4 > 256$;
2) $(x+5)^3 > 8$; 4) $(3x-5)^7 < 1$; 6) $(4-x)^4 > 81$.

237. Объяснить, почему данное уравнение не имеет корней:

- 1) $\sqrt{x} = -8$; 3) $\sqrt{-2-x^2} = 12$;
2) $\sqrt{x} + \sqrt{x-4} = -3$; 4) $\sqrt{7x-x^2-63} = 5$.

Решить уравнение (238–240).

238. 1) $\sqrt{x^2-4x+9} = 2x-5$; 3) $2x = 1 + \sqrt{x^2+5}$;

2) $\sqrt{x^2+3x+6} = 3x+8$; 4) $x + \sqrt{13-4x} = 4$.

239. 1) $\sqrt{x+12} = 2 + \sqrt{x}$; 2) $\sqrt{4+x} + \sqrt{x} = 4$.

240. 1) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = 3$; 3) $\sqrt{x-7} - \sqrt{x+17} = -4$;

2) $\sqrt{4x-3} + \sqrt{5x+4} = 4$; 4) $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1$.

241. При каких значениях x функции принимают одинаковые значения:

1) $y = \sqrt{4+\sqrt{x}}$, $y = \sqrt{19-2\sqrt{x}}$; 2) $y = \sqrt{7+\sqrt{x}}$, $y = \sqrt{11-\sqrt{x}}$?

242. Решить неравенство:

1) $\sqrt{x-2} > 3$; 3) $\sqrt{2-x} \geq x$; 5) $\sqrt{5x+11} > x+3$;

2) $\sqrt{x-2} \leq 1$; 4) $\sqrt{2-x} < x$; 6) $\sqrt{x+3} \leq x+1$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

243. Найти область определения функции:

1) $y = \frac{1}{2x+1}$; 3) $y = \sqrt{-5-3x}$;

2) $y = (3-2x)^{-2}$; 4) $y = \sqrt[3]{7-3x}$.

244. (Устно.) Используя свойства возрастания или убывания функций $y = \sqrt[4]{x}$ и $y = x^5$, сравнить числа:

1) $\sqrt[4]{2,7}$ и $\sqrt[4]{2,9}$;

3) $(-2)^5$ и $(-3)^5$;

2) $\sqrt[4]{\frac{1}{7}}$ и $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$;

4) $(2\frac{2}{3})^5$ и $(2\frac{3}{4})^5$.

245. Выяснить свойства функции и построить эскиз ее графика:

1) $y = -2x^4$; 2) $y = \frac{1}{2}x^5$; 3) $y = 2\sqrt[4]{x}$; 4) $y = 3\sqrt[3]{x}$.

246. (Устно.) В каких квадрантах расположены ветви гиперболы $y = \frac{k}{x}$, если $k = -4$, $k = 3$?

247. Построить на одном рисунке графики функций $y = x$ и $y = x^3$. Найти координаты точек пересечения этих графиков.

248. Найти координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = x^2$, $y = x^3$;

3) $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$;

2) $y = \frac{1}{x}$, $y = 2x$;

4) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \frac{1}{x}$.

249. Решить неравенство:

1) $x^4 \leq 81$; 2) $x^5 > 32$; 3) $x^6 > 64$; 4) $x^5 \leq -32$.

250. Решить уравнение:

1) $\sqrt{3-x} = 2$;

4) $\sqrt{5x-1} + 3x^2 = 3x$;

2) $\sqrt{3x+1} = 7$;

5) $\sqrt{2x-1} = x-2$;

3) $\sqrt{3-11x} = 2x$;

6) $\sqrt{2-2x} = x+3$.

251. Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt[5]{x^2 + x - 2}$;

4) $y = \sqrt[4]{13x - 22 - x^2}$;

2) $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 15}$;

5) $y = \sqrt{\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 7}}$;

3) $y = \sqrt[6]{6 - x - x^2}$;

6) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x^2 + 8x + 7}}$.

Проверьте себя!

1. Найти область определения функции:

1) $y = \frac{8}{x-1}$;

2) $y = \sqrt{9-x^2}$.

2. Построить график функции:

1) $y = 3\sqrt{x}$; 2) $y = \frac{6}{x}$; 3) $y = -\frac{5}{x}$; 4) $y = 2x^3$.

Для каждой функции по графику найти: а) $y(2)$; б) значения x , если $y(x) = 3$; в) промежутки, на которых $y(x) > 0$, $y(x) < 0$; г) промежутки возрастания, убывания.

3. Исследовать функцию на четность и нечетность:

1) $y = 3x^6 + x^2$;

2) $y = 8x^5 - x$.

4. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x-3} = 5$;

2) $\sqrt{3-x-x^2} = x$.

252. Выяснить, возрастает или убывает функция:

1) $y = \frac{1}{(x-3)^2}$ на промежутке $x > 3$;

2) $y = \frac{1}{(x-2)^3}$ на промежутке $x < 2$;

3) $y = \sqrt[3]{x+1}$ на промежутке $x \geq 0$;

4) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ на промежутке $x < -1$.

253. Выяснить, является ли функция четной или нечетной:

1) $y = x^6 - 3x^4 + x^2 - 2$;

3) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$;

2) $y = x^5 - x^3 + x$;

4) $y = x^7 + x^5 + 1$.

254. Выяснить свойства функции и построить ее график:

1) $y = \frac{1}{x^2}$;

3) $y = \frac{1}{x^3} + 2$;

5) $y = \frac{1}{(3-x)^2} + 1$;

2) $y = \frac{1}{x^3}$;

4) $y = 3 - \frac{1}{x^2}$;

6) $y = \frac{1}{(x-1)^8} - 2$.

255. Решить неравенство:

1) $(3x+1)^4 > 625$;

2) $(3x^2+5x)^5 \leq 32$.

256. Решить уравнение:

1) $\sqrt{2x^2+5x-3} = x+1$;

4) $\sqrt{x+19} = 1+\sqrt{x}$;

2) $\sqrt{3x^2-4x+2} = x+4$;

5) $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-3} = 6$;

3) $\sqrt{x+11} = 1+\sqrt{x}$;

6) $\sqrt{7-x} + \sqrt{3x-5} = 4$.

257. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x^2-8x} > 3$;

3) $\sqrt{3x-2} > x-2$;

2) $\sqrt{x^2-3x} < 2$;

4) $\sqrt{2x+1} \leq x-1$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Найти область определения функции $y = \sqrt{-x^2+3x-2}$.

A) $1 \leq x \leq 2$;

C) $x \geq 2, x \leq 1$;

E) $x \leq -1, x \geq 2$.

B) $1 < x < 2$;

D) $-2 \leq x \leq -1$;

2. Найти область определения функции $y = \sqrt[4]{\frac{3x+2}{4x-5}}$.

A) $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{4}$;

C) $x \geq \frac{5}{4}$;

E) правильный ответ не приведен.

B) $x \leq -\frac{2}{3}, x > \frac{5}{4}$;

D) $x < -\frac{2}{3}$;

3. Найти область определения функции $y = \sqrt{\frac{-x^2+13x-22}{x-2}}$.

A) $x < 2$;

C) $x < 2, 2 < x < 11$;

E) $-2 \leq x \leq 11$.

B) $2 < x < 11$;

D) $x < -2$;

4. Какие из функций являются возрастающими:

1) $y = -x$;

2) $y = -\frac{2}{x}$;

3) $y = \sqrt{x}$;

4) $y = \sqrt{x-100}$?

A) все;

B) 1, 2, 3;

C) 1, 3, 4;

D) 2, 3, 4;

E) 1, 2, 4.

5. Какие из функций являются возрастающими:

1) $y = \sqrt[3]{-x}$;

2) $y = \sqrt[4]{x^2}$;

3) $y = -2x + 7$;

4) $y = -\sqrt{3-x}$?

A) 1, 4;

B) 3, 4;

C) 2, 3;

D) 1, 2;

E) 2, 4.

6. Какие из функций являются убывающими?

1) $y = -\frac{1}{x^3}$; 2) $y = -3x + 4$; 3) $y = x^3 - 27$; 4) $y = \sqrt[3]{8-x}$.

A) 2, 4; B) 1, 2; C) 2, 3; D) 3, 4; E) 1, 4.

7. Какие из функций являются убывающими?

1) $y = \sqrt[4]{x^3}$; 2) $y = \sqrt[3]{-x}$; 3) $y = \frac{7}{\sqrt{3+2x}}$; 4) $y = \sqrt[4]{x-16}$.

A) 1, 2; B) 2, 3; C) 3, 4; D) 1, 3; E) 2, 4.

8. Какие из функций являются четными?

1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) $y = x^2 + |x|$; 3) $y = -3 + \frac{5}{x^4}$; 4) $y = x^2 - \frac{3}{x}$.

A) 1, 2; B) 3, 4; C) 2, 3; D) 1, 4; E) 1, 3.

9. Какие из функций являются четными?

1) $y = 3x^6 - 7x^4 + 5x^2 + 9$; 3) $y = 1 + 4x^5 + 7x^7$;

2) $y = (x+1)^4 + 3(x+1)^2 - 6$; 4) $y = \frac{5x^4}{1+|x|}$.

A) 1, 2; B) 2, 3; C) 3, 4; D) 1, 4; E) 2, 4.

10. Какие из функций являются нечетными?

1) $y = 6x$; 2) $y = \sqrt[3]{x}$; 3) $y = 4x + 7$; 4) $y = 2x^3 - 10$.

A) 2, 4; B) 2, 3; C) 3, 4; D) 1, 4; E) 1, 2.

11. Какие из функций являются нечетными?

1) $y = \frac{1}{x^{2k-1}}$; 2) $y = x^2 + x^5$; 3) $y = x^3 + 7$; 4) $y = x^{2n+1}$ ($k, n \in \mathbb{N}$).

A) 1, 4; B) 2, 3; C) 3, 4; D) 1, 2; E) правильного ответа нет.

12. При каких значениях a и k графики функций $y = ax^2$ и $y = \frac{k}{x}$ пересекаются в точке $(3; 2)$?

A) $a = -\frac{2}{9}, k = 6$; C) $a = 6, k = \frac{2}{9}$; E) $a = 6, k = -\frac{9}{2}$.

B) $a = \frac{2}{9}, k = 6$; D) $a = -\frac{2}{9}, k = -6$;

13. При каких значениях k гипербола $y = \frac{k}{x}$ и прямая $y = 2x + 5$ пересекаются в двух точках?
- A) $k < \frac{25}{8}$; B) $k < -\frac{25}{8}$; C) $k > -\frac{25}{8}$; D) $k > \frac{25}{8}$; E) $k = \frac{25}{8}$.
14. При каких значениях k гипербола $y = \frac{k}{x}$ и прямая $y = 6 - x$ имеют одну общую точку?
- A) 10; B) -9; C) 8; D) 9; E) -10.
15. При каких значениях k гипербола $y = \frac{k}{x}$ и прямая $y = 3 - 2x$ не пересекаются?
- A) $k = \frac{9}{8}$; B) $k < \frac{9}{8}$; C) $k > -\frac{9}{8}$; D) $k < -\frac{9}{8}$; E) $k > \frac{9}{8}$.
16. Найти корень уравнения $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3$, принадлежащий области определения функции $y = \sqrt{\frac{x^2 - 15x + 50}{x^2 - 11x + 24}}$.
- A) 6; B) 9; C) -6; D) 3; E) 10.
17. Найти сумму целых решений неравенства $\sqrt{x-50} \cdot \sqrt{100-x} > 0$.
- A) 3765; B) 3675; C) 49; D) 99; E) 3775.
18. Решить уравнение $\sqrt{2x^2 - 8x + 5} = x - 2$.
- A) $4 - \sqrt{3}$; B) $\sqrt{14}$; C) $2 + \sqrt{3}$; D) $2 - \sqrt{3}$; E) $2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.
19. Решить уравнение $\sqrt{2x-3} = 3-x$.
- A) 6; B) $\frac{3}{2}$; C) 3; D) 2; E) $\emptyset$.
20. Найти число целых решений неравенства $\sqrt[5]{3-x} \cdot \sqrt{-2x^2 + 9x + 5} \geq 0$.
- A) 6; B) 3; C) 5; D) 2; E) 4.



Абу Райхан Беруни
(973–1048)

Слово *функция* происходит от латинского слова *functio* — исполнение, осуществление. Первые определения функции принадлежат *Г. В. Лейбницу*.

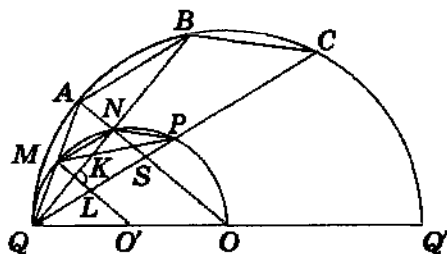
Древние ученые, не владея современным понятием функции, ясно представляли себе характер функциональной зависимости между переменными величинами.

За 4000 лет до наших дней в Древнем Вавилоне пользовались, пусть и грубо приближенной, формулой для площади круга радиуса r — $S = 3r^2$.

Ранние сведения о степенях чисел сохранились на вавилонских клинописных табличках. В частности, имеются таблицы квадратов и кубов чисел.

Таблицы квадратов и кубов чисел, таблицы логарифмов и тригонометрические таблицы — все это примеры функциональной зависимости, заданной в табличной форме.

Великий ученый-энциклопедист Абу Райхан Беруни широко пользовался в своих трудах понятием функциональной зависимости. В 6-й главе своего фундаментального руководства по астрономии "Канон Масуда" он определяет промежутки изменения аргумента и функции, наибольшие и наименьшие значения функции.



§ 19

РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Пусть вертикальная прямая касается в точке P окружности с центром O радиуса 1 (рис. 47). Будем считать эту прямую числовой осью с началом в точке P , а положительным направлением на прямой — направление вверх. За единицу длины на числовой оси возьмем радиус окружности. Отметим на прямой несколько точек: $\pm 1, \pm \frac{\pi}{2}, \pm 3, \pm \pi$ (напомним, что π — иррациональное число, приближенно равное 3,14). Вообразив эту прямую в виде нерастяжимой нити, закрепленной на окружности в точке P , будем мысленно наматывать ее на окружность. При этом точки числовой прямой с координатами, например, $1, \frac{\pi}{2}, -1, -2$ перейдут соответственно в точки окружности M_1, M_2, M_3, M_4 , такие, что длина дуги PM_1 равна 1, длина дуги PM_2 равна $\frac{\pi}{2}$ и т. д.

Таким образом, каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.

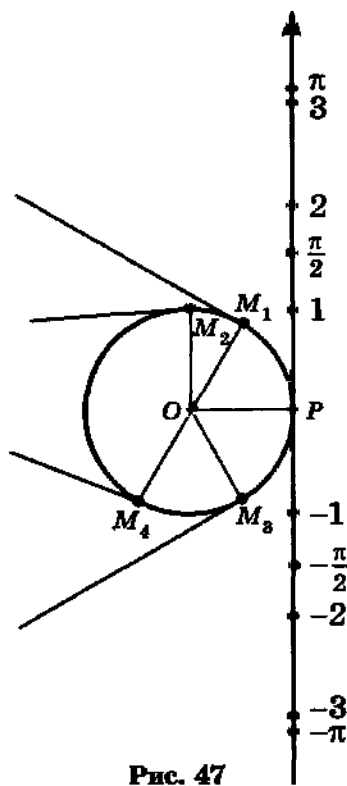


Рис. 47

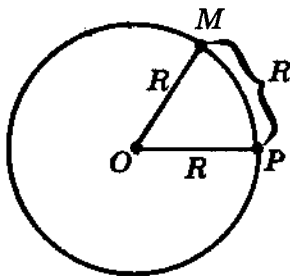


Рис. 48

Так как точке прямой с координатой 1 ставится в соответствие точка M_1 , то естественно считать угол POM_1 единичным и мерой этого угла измерять другие углы. Например, угол POM_2 следует считать равным $\frac{\pi}{2}$, угол POM_3 — равным -1 , угол POM_4 — равным -2 . Такой способ измерения углов широко используется в математике и физике. В этом случае говорят, что углы *измеряются в радианной мере*, а угол POM_1 называют углом в 1 *радиан* (1 рад.).

Отметим, что длина дуги окружности PM_1 равна радиусу. Теперь рассмотрим окружность произвольного радиуса R и отметим на ней дугу PM , длина которой равна R , и угол POM (рис. 48).



Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется *углом в 1 радиан*.

Найдем градусную меру угла в 1 рад. Так как дуга длиной πR (полуокружность) стягивает центральный угол в 180° , то дуга длиной R стягивает угол, в π раз меньший, т. е.

$$1 \text{ рад.} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

Так как $\pi \approx 3,14$, то $1 \text{ рад.} \approx 57,3^\circ$.

Если угол содержит α радиан, то его градусная мера равна:

$$\alpha \text{ рад.} = \left(\frac{180}{\pi} \alpha \right)^\circ. \quad (1)$$

Задача 1. Найти градусную меру угла, равного:

1) π рад.; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад.; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад.

△ По формуле (1) находим:

1) $\pi \text{ рад.} = 180^\circ$; 2) $\frac{\pi}{2} \text{ рад.} = 90^\circ$; 3) $\frac{3\pi}{4} \text{ рад.} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} \right)^\circ = 135^\circ$. ▲

Найдем радианную меру угла в 1° . Так как угол 180° равен π рад., то

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад.}$$

Если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \alpha \text{ рад.} \quad (2)$$

Задача 2. Найти радианную меру угла, равного: 1) 45° ; 2) 15° .

Δ По формуле (2) находим:

$$1) 45^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 45 \text{ рад.} = \frac{\pi}{4} \text{ рад.};$$

$$2) 15^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 15 \text{ рад.} = \frac{\pi}{12} \text{ рад.} \blacktriangle$$

Приведем таблицу наиболее часто встречающихся углов в градусной и в радианной мере.

Градусы	0	30	45	60	90	180
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Обычно при обозначении угла в радианах наименование «рад.» опускают.

Радианная мера угла удобна для вычисления длины дуги окружности. Так как угол в 1 рад. стягивает дугу, длина которой равна радиусу R , то угол в α радиан стягивает дугу длиной

$$l = \alpha R. \quad (3)$$

Задача 3. Конец минутной стрелки городских курантов движется по окружности радиуса $R \approx 0,8$ м. Какой путь проходит конец этой стрелки за 15 минут?

Δ За 15 минут минутная стрелка поворачивается на угол $\frac{\pi}{2}$ радиан. По формуле (3) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ находим:

$$l = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3,14}{2} \cdot 0,8 \text{ м} \approx 1,3 \text{ м}.$$

Ответ: 1,3 м. ▲

Особенно простой вид формула (3) имеет в случае, когда радиус окружности $R=1$. Тогда длина дуги равна величине центрального угла, стягиваемого этой дугой, в радианах, т. е. $l = \alpha$. Этим объясняется удобство применения радианной меры в математике, физике, механике и т. д.

Задача 4. Доказать, что площадь кругового сектора радиуса R , образованного углом в α рад., равна

$$S = \frac{R^2}{2} \alpha, \text{ где } 0 < \alpha < \pi.$$

△ Площадь кругового сектора в π рад. (полукруга) равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Поэтому площадь сектора в 1 рад. в π раз меньше, т. е. равна $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$. Следовательно, площадь сектора в α рад. равна $\frac{R^2}{2} \alpha$. ▲

У п р а ж н е н и я

258. Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:

- | | | | |
|------------------|------------------|-----------------|------------------|
| 1) 40° ; | 3) 105° ; | 5) 75° ; | 7) 100° ; |
| 2) 120° ; | 4) 150° ; | 6) 32° ; | 8) 140° . |

259. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|-------|----------|
| 1) $\frac{\pi}{6}$; | 3) $\frac{2}{3}\pi$; | 5) 2; | 7) 1,5; |
| 2) $\frac{\pi}{9}$; | 4) $\frac{3}{4}\pi$; | 6) 4; | 8) 0,36. |

260. Записать с точностью до 0,01 число:

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|-------------|-----------------------|
| 1) $\frac{\pi}{2}$; | 2) $\frac{3}{2}\pi$; | 3) 2π ; | 4) $\frac{2}{3}\pi$. |
|----------------------|-----------------------|-------------|-----------------------|

261. Сравнить числа:

- | | | | |
|-------------------------|-----------------------------|--|--|
| 1) $\frac{\pi}{2}$ и 2; | 3) π и $3\frac{1}{5}$; | 5) $-\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{3}{2}$; | |
| 2) 2π и 6,7; | 4) $\frac{3}{2}\pi$ и 4,8; | 6) $-\frac{3}{2}\pi$ и $-\sqrt{10}$. | |

- 262.** (Устно.) Определить градусную и радианную меру углов:
- а) равностороннего треугольника;
 - б) равнобедренного треугольника;
 - в) квадрата;
 - г) правильного шестиугольника.
-

263. Вычислить радиус окружности, если дуга длиной 0,36 м стягивает центральный угол 0,9 рад.

264. Найти радианную меру угла, стягиваемого дугой окружности, если длина дуги 3 см, а радиус окружности 1,5 см.

265. Дуга кругового сектора стягивает угол в $\frac{3\pi}{4}$ рад. Найти площадь сектора, если радиус круга равен 1 см.

266. Радиус круга равен 2,5 см, а площадь кругового сектора равна 6,25 см². Найти угол, который стягивается дугой этого кругового сектора.

§ 20

ПОВОРОТ ТОЧКИ ВОКРУГ НАЧАЛА КООРДИНАТ

В предыдущем параграфе использовался наглядный способ установления соответствия между точками числовой прямой и точками окружности. Покажем теперь, как можно установить соответствие между действительными числами и точками окружности с помощью поворота точки окружности.

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют *единичной окружностью*. Введем понятие *поворота точки* единичной окружности вокруг начала координат на угол α радиан, где α — любое действительное число.

1. Пусть $\alpha > 0$. Предположим, что точка, двигаясь по единичной окружности от точки P против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис. 49). Конечную точку пути обозначим M .

В этом случае будем говорить, что точка M получена из точки P поворотом вокруг начала координат на угол α радиан.

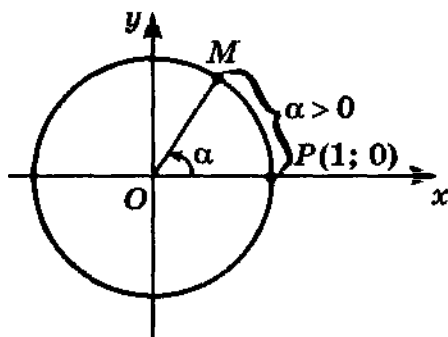


Рис. 49

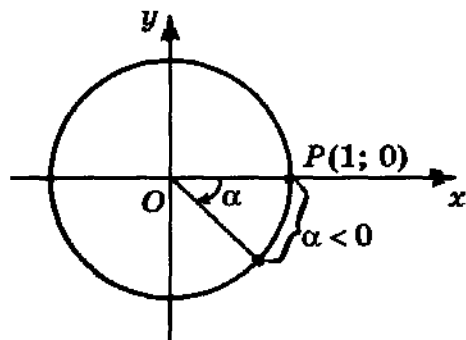


Рис. 50

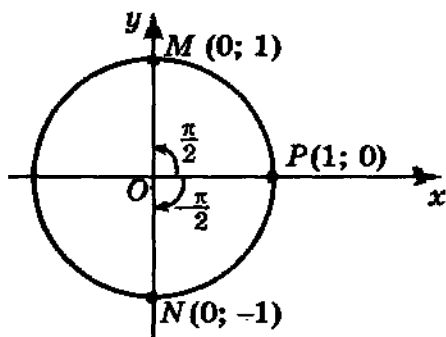


Рис. 51

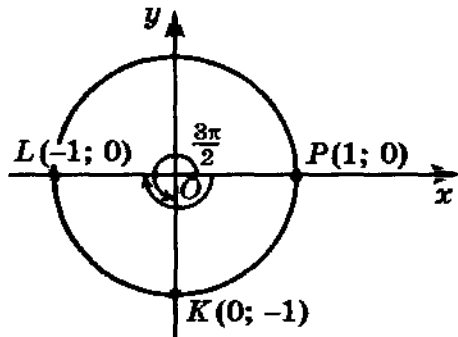


Рис. 52

2. Пусть $\alpha < 0$. В этом случае поворот на угол α радиан означает, что движение совершалось по часовой стрелке и точка прошла путь длиной $|\alpha|$ (рис. 50).

Поворот на 0 рад. означает, что точка остается на месте.

Примеры.

1) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$ рад. (рис. 51) получается точка M с координатами $(0; 1)$.

2) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $-\frac{\pi}{2}$ рад. (рис. 51) получается точка $N(0; -1)$.

3) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ рад. (рис. 52) получается точка $K(0; -1)$.

4) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $-\pi$ рад. (рис. 52) получается точка $L(-1; 0)$.

В курсе геометрии рассматривались углы от 0° до 180° . Используя поворот точки единичной окружности вокруг начала координат, можно рассматривать углы, большие 180° , а также отрицательные углы. Угол поворота можно задавать как в градусах, так и в радианах. Например, поворот точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ означает то же самое, что и поворот на 270° ; поворот на угол $-\frac{\pi}{2}$ — это поворот на -90° .

Приведем таблицу поворотов на некоторые углы, выраженные в радианной и градусной мерах (рис. 53).

Отметим, что при повороте точки $P(1; 0)$ на 2π , т. е. на 360° , точка возвращается в первоначальное положение (см. таблицу). При повороте этой точки на -2π , т. е. на -360° , она также возвращается в первоначальное положение.

Рассмотрим примеры поворотов на угол, больший 2π , и на угол, меньший 2π . Так, при повороте на угол $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота против часовой стрелки и проходит еще путь $\frac{\pi}{2}$ (рис. 54).

При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2} = -2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелке и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ в том же направлении (рис. 55).

Заметим, что при повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 54). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2}$

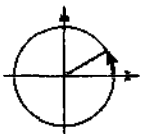
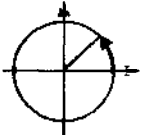
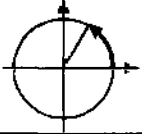
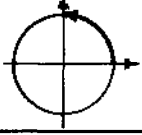
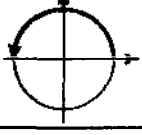
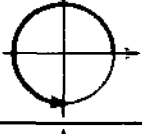
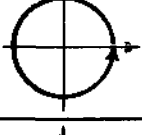
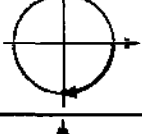
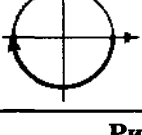
	$\frac{\pi}{6}$	30°
	$\frac{\pi}{4}$	45°
	$\frac{\pi}{3}$	60°
	$\frac{\pi}{2}$	90°
	π	180°
	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	-90°
	$-\pi$	-180°

Рис. 53

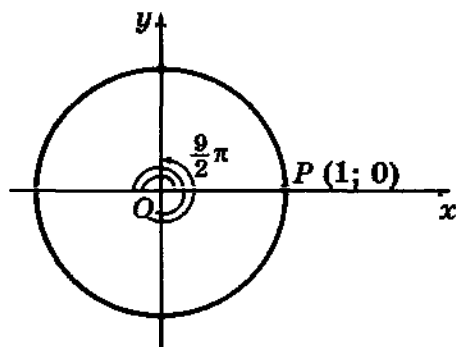


Рис. 54

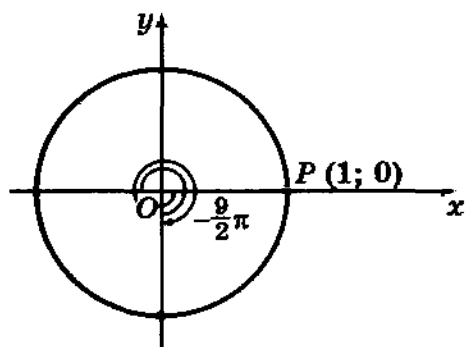
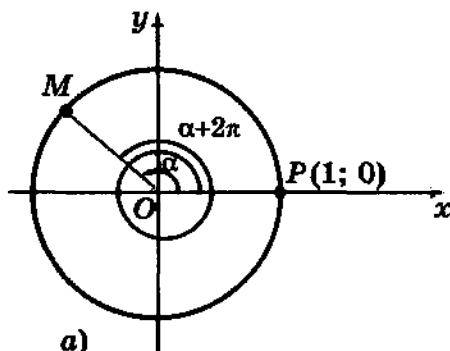
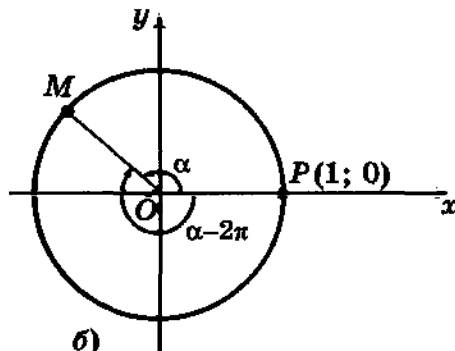


Рис. 55



а)



б)

Рис. 56

получается та же самая точка, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$ (рис. 55).

Вообще, если $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, где k — целое число, то при повороте на угол α получается та же самая точка, что и при повороте на угол α_0 .

Итак, каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $(1; 0)$ на угол α рад.

Однако одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k — целое число, задающих поворот точки $P(1; 0)$ в точку M (рис. 56).

Задача 1. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол: 1) 7π ; 2) $-\frac{5\pi}{2}$.

△ 1) Так как $7\pi = \pi + 2\pi \cdot 3$, то при повороте на 7π получается та же самая точка, что и при повороте на π , т. е. получается точка с координатами $(-1; 0)$.

2) Так как $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$, то при повороте на угол $-\frac{5\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$, т. е. точка с координатами $(0; -1)$. ▲

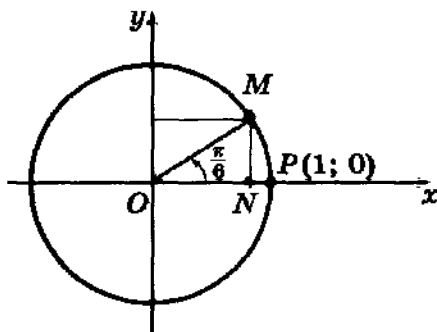


Рис. 57

Задача 2. Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $(1; 0)$, чтобы получить точку $(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$.

△ Из прямоугольного треугольника NOM (рис. 57) следует, что угол NOM равен $\frac{\pi}{6}$, т. е. один из возможных углов поворота равен $\frac{\pi}{6}$. Следовательно, все углы, на которые нужно повернуть точку $(1; 0)$, чтобы получить точку $(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$, выражаются так: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где k — любое целое число, т. е. $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ▲

У п р а ж н е н и я

267. Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

- 1) 90° ; 2) $-\pi$; 3) 180° ; 4) $-\frac{\pi}{2}$; 5) 270° ; 6) 2π .

268. На единичной окружности отметить точку, полученную поворотом точки $P(1; 0)$ на заданный угол:

- | | | | |
|-----------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 1) $\frac{\pi}{4}$; | 3) $-\frac{2}{3}\pi$; | 5) $\frac{\pi}{2} + 2\pi$; | 7) $\frac{\pi}{4} - 4\pi$; |
| 2) $-\frac{\pi}{3}$; | 4) $\frac{3}{4}\pi$; | 6) $-\pi - 2\pi$; | 8) $-\frac{\pi}{3} + 6\pi$. |

269. Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

- 1) $2,1\pi$; 2) $2\frac{2}{3}\pi$; 3) $-\frac{13}{3}\pi$; 4) $-\frac{25}{4}\pi$; 5) 727° ; 6) 460° .

270. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

- 1) 3π ; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π ; 5) 540° ; 6) 810° .

271. Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку:

- 1) $(-1; 0)$; 2) $(1; 0)$; 3) $(0; 1)$; 4) $(0; -1)$.

272. Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на заданный угол:

- 1) 1 ; 2) $2,75$; 3) $3,16$; 4) $4,95$.

273. Найти число x , где $0 \leq x < 2\pi$, и натуральное число k , такие, чтобы выполнялось равенство $a = x + 2\pi k$, если:

- 1) $a = 6,7\pi$; 3) $a = 4\frac{1}{2}\pi$; 5) $a = \frac{11}{2}\pi$;
2) $a = 9,8\pi$; 4) $a = 7\frac{1}{3}\pi$; 6) $a = \frac{17}{3}\pi$.

274. На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки $P(1; 0)$ на заданный угол:

- 1) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3} \pm 6\pi$; 5) $4,5\pi$; 7) -6π ;
2) $-\frac{\pi}{3} \pm 2\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi$; 6) $5,5\pi$; 8) -7π .

275. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол (k — целое число):

- 1) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k$; 3) $\frac{7\pi}{2} + 2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2} + 2\pi k$.

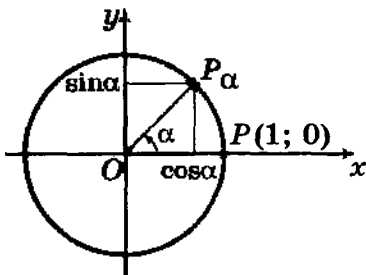
276. Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $(1; 0)$, чтобы получить точку с координатами:

- 1) $(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$; 2) $(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$; 3) $(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$; 4) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$.

В курсе геометрии были введены синус, косинус и тангенс угла, выраженного в градусах. Этот угол рассматривался в промежутке от 0° до 180° . Синус и косинус произвольного угла определяются следующим образом:



Определение 1. Синусом угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α (обозначается $\sin \alpha$).



Определение 2. Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α (обозначается $\cos \alpha$).

В этих определениях угол α может выражаться как в градусах, так и в радианах.

Например, при повороте точки $(1; 0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$, т. е. угол 90° , получается точка $(0; 1)$. Ордината точки $(0; 1)$ равна 1, поэтому

$$\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1;$$

абсцисса этой точки равна 0, поэтому

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0.$$

Заметим, что приведенные определения синуса и косинуса в случае, когда угол заключен в промежутке от 0° до 180° , совпадают с определениями синуса и косинуса, известными из курса геометрии.

Например, $\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos \pi = \cos 180^\circ = -1$.

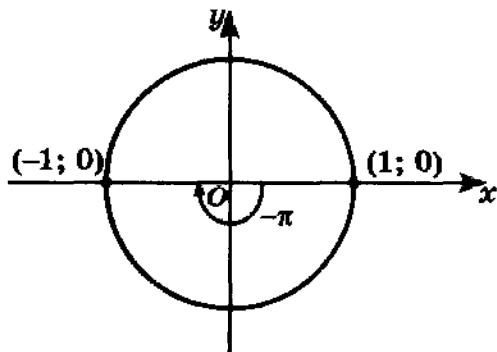


Рис. 58

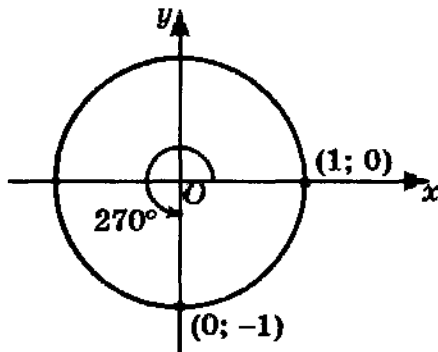


Рис. 59

Задача 1. Найти $\sin(-\pi)$ и $\cos(-\pi)$.

Δ Точка $(1; 0)$ при повороте на угол $-\pi$ перейдет в точку $(-1; 0)$ (рис. 58). Следовательно, $\sin(-\pi)=0$, $\cos(-\pi)=-1$. $\blacktriangle$

Задача 2. Найти $\sin 270^\circ$ и $\cos 270^\circ$.

Δ Точка $(1; 0)$ при повороте на угол 270° перейдет в точку $(0; -1)$ (рис. 59). Следовательно, $\cos 270^\circ=0$, $\sin 270^\circ=-1$. $\blacktriangle$

Задача 3. Решить уравнение $\sin t = 0$.

Δ Решить уравнение $\sin t = 0$ — это значит найти все углы, синус которых равен нулю.

Ординату, равную нулю, имеют две точки единичной окружности: $(1; 0)$ и $(-1; 0)$ (рис. 58). Эти точки получаются из точки $(1; 0)$ поворотом на углы $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ и т. д., а также на углы $-\pi, -2\pi, -3\pi$ и т. д.

Следовательно, $\sin t = 0$ при $t = k\pi$, где k — любое целое число. $\blacktriangle$

Множество целых чисел обозначается буквой $\mathbb{Z}$. Для обозначения того, что число k принадлежит $\mathbb{Z}$, используют запись $k \in \mathbb{Z}$ (читается: «число k принадлежит $\mathbb{Z}$ »). Поэтому ответ к задаче 3 можно записать так:

$$t = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 4. Решить уравнение $\cos t = 0$.

Δ Абсциссу, равную нулю, имеют две точки единичной окружности: $(0, 1)$ и $(0; -1)$ (рис. 60).

Эти точки получаются из точки $(1; 0)$ поворотом на углы $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi$ и т. д., а также на углы $\frac{\pi}{2} - \pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi$ и т. д., т. е. на углы $\frac{\pi}{2} + k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. ▲

Задача 5. Решить уравнение:

1) $\sin t = 1$; 2) $\cos t = 1$.

Δ 1) Ординату, равную единице, имеет точка $(0; 1)$ единичной окружности. Эта точка получается из точки $(1; 0)$ поворотом на углы $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2) Абсциссу, равную единице, имеет точка, полученная из точки $(1; 0)$ поворотом на углы $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\sin t = 1$ при $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$,

$\cos t = 1$ при $t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. ▲

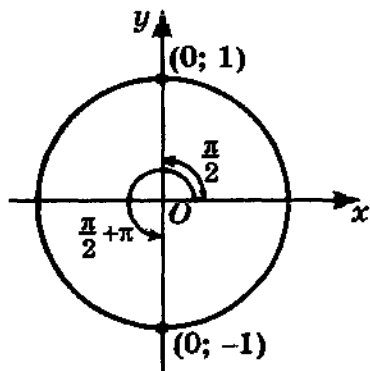


Рис. 60

! **Определение 3.** Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу (обозначается $\operatorname{tg} \alpha$)

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Например, $\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

Иногда используется *котангенс* угла α (обозначается $\operatorname{ctg} \alpha$). Он определяется формулой

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Например, $\operatorname{ctg} 270^\circ = \frac{\cos 270^\circ}{\sin 270^\circ} = \frac{0}{-1} = 0$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1$.

Отметим, что $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ определены для любого угла, а их значения заключены от -1 до 1 ; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ определен лишь для тех углов, для которых $\cos \alpha \neq 0$, т. е. для любых углов, кроме $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Приведем таблицу часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	0	не существует	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не существует	0	не существует

Задача 6. Вычислить

$$4 \sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}.$$

△ Используя таблицу, получаем:

$$4 \sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 2,5. \blacktriangle$$

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов, не вошедших в эту таблицу, можно найти по четырехзначным математическим таблицам В. М. Брадиса, а также с помощью инженерного микрокалькулятора.

Если каждому действительному числу x поставить в соответствие число $\sin x$, то тем самым на множестве действительных чисел (оно обозначается буквой R) будет задана функция $y = \sin x$.

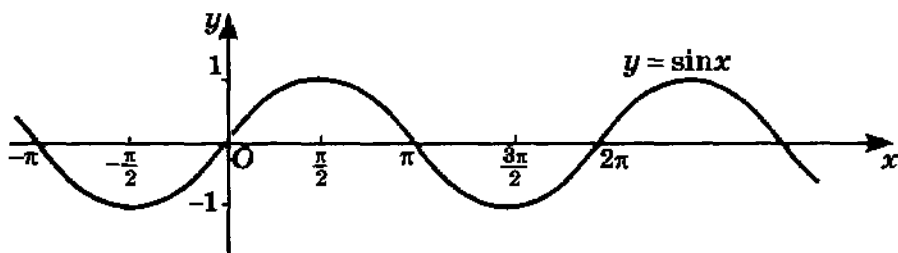


Рис. 61

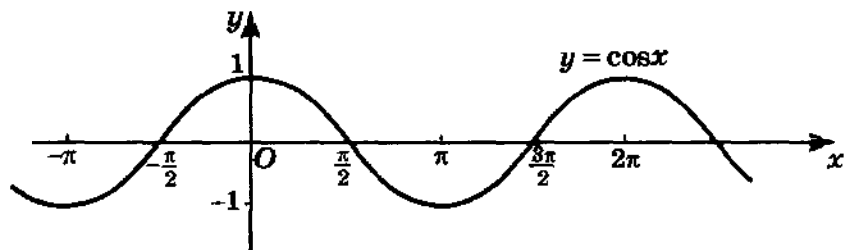


Рис. 62

Аналогично задаются функции $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.
 Функция $y = \cos x$ определена при всех $x \in R$, функция $y = \operatorname{tg} x$ — при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, функция $y = \operatorname{ctg} x$ — при $x \neq \pi k$, $k \in Z$.
 Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ изображены на рис. 61 и 62. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ называют *тригонометрическими*.

У п р а ж н е н и я

277. Вычислить:

- | | | | |
|----------------------------|---|--|------------------------------|
| 1) $\sin \frac{3\pi}{4}$; | 3) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$; | 5) $\cos(-180^\circ)$; | 7) $\cos(-135^\circ)$; |
| 2) $\cos \frac{2\pi}{3}$; | 4) $\sin(-90^\circ)$; | 6) $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})$; | 8) $\sin(-\frac{5\pi}{4})$. |

278. Изобразить на единичной окружности точки, соответствующие углу α , если:

- | | | |
|--|---|----------------------------------|
| 1) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; | 3) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 5) $\sin \alpha = -0,6$; |
| 2) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; | 4) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$; | 6) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. |

Вычислить (279–281).

279. 1) $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2}$; 3) $\sin \pi - \cos \pi$; 5) $\sin \pi + \sin 1,5\pi$;
2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{2}$; 4) $\sin 0 - \cos 2\pi$; 6) $\cos 0 - \cos \frac{3}{2}\pi$.

280. 1) $\operatorname{tg} \pi + \cos \pi$; 3) $\operatorname{tg} \pi + \sin \pi$;
2) $\operatorname{tg} 0^\circ - \operatorname{tg} 180^\circ$; 4) $\cos \pi - \operatorname{tg} 2\pi$.

281. 1) $3 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$; 3) $\left(2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) : \cos \frac{\pi}{6}$;
2) $5 \sin \frac{\pi}{6} + 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - 10 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$; 4) $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

282. Решить уравнение:

1) $2 \sin x = 0$; 2) $\frac{1}{2} \cos x = 0$; 3) $\cos x - 1 = 0$; 4) $1 - \sin x = 0$.

283. (Устно.) Может ли $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$ быть равным:

1) 0,49; 2) -0,875; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2 - \sqrt{2}$?

284. Найти значение выражения при данном значении α :

1) $2 \sin \alpha + \sqrt{2} \cos \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $0,5 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha$ при $\alpha = 60^\circ$;

3) $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

4) $\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{3}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

285. Решить уравнение:

1) $\sin x = -1$; 3) $\sin 3x = 0$; 5) $\cos 2x - 1 = 0$;
2) $\cos x = -1$; 4) $\cos 0,5x = 0$; 6) $1 - \cos 3x = 0$.

286. Решить уравнение:

1) $\sin(x + \pi) = -1$; 3) $\cos(x + \pi) = -1$; 5) $\sin 3(x - 2) = 0$;
2) $\sin \frac{1}{2}(x + 1) = 0$; 4) $\cos 2(x + 1) - 1 = 0$; 6) $1 - \cos 3(x - 1) = 0$.

1. Знаки синуса и косинуса

Пусть точка $(1; 0)$ движется по единичной окружности против часовой стрелки. Для точек, находящихся в первой четверти (квadrante), ординаты и абсциссы положительны, поэтому $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha > 0$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 63, 64).

Для точек, расположенных во второй четверти, ординаты положительны, а абсциссы отрицательны. Следовательно, $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (рис. 63, 64). Аналогично в третьей четверти $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$, а в четвертой четверти $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$ (рис. 63, 64). При дальнейшем движении точки по окружности знаки синуса и косинуса определяются тем, в какой четверти окажется точка.

Если точка $(1; 0)$ движется по часовой стрелке, то *знаки синуса и косинуса также определяются тем, в какой четверти окажется точка*; это показано на рисунках 63, 64.

Задача 1. Выяснить знаки синуса и косинуса угла:

- 1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) 745° ; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

Δ 1) Углу $\frac{3\pi}{4}$ соответствует точка единичной окружности, расположенная во второй четверти, поэтому $\sin \frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos \frac{3\pi}{4} < 0$.

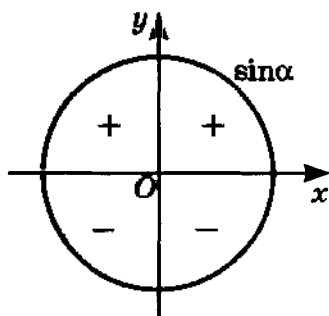


Рис. 63

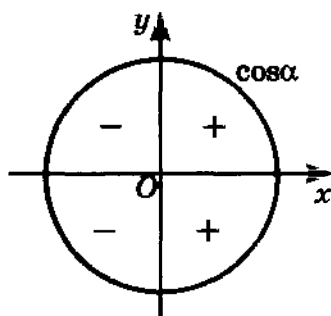


Рис. 64

2) Так как $745^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 25^\circ$, то повороту точки $(1; 0)$ на угол 745° соответствует точка, расположенная в первой четверти, поэтому $\sin 745^\circ > 0$, $\cos 745^\circ > 0$.

3) Так как $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$, то при повороте точки $(1; 0)$ на угол $-\frac{5\pi}{7}$ получается точка третьей четверти, поэтому

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0, \quad \cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0. \blacktriangle$$

2. Знаки тангенса

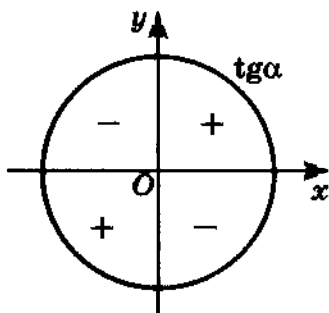


Рис. 65

По определению $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, поэтому $\operatorname{tg} \alpha > 0$, если $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ имеют одинаковые знаки, и $\operatorname{tg} \alpha < 0$, если $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ имеют противоположные знаки. *Знаки тангенса* изображены на рисунке 65.

Знаки $\operatorname{ctg} \alpha$ совпадают со знаками $\operatorname{tg} \alpha$.

Задача 2. Выяснить знак тангенса угла: 1) 260° ; 2) 3.

Δ 1) Так как $180^\circ < 260^\circ < 270^\circ$, то $\operatorname{tg} 260^\circ > 0$.

2) Так как $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, то $\operatorname{tg} 3 < 0. \blacktriangle$

У п р а ж н е н и я

287. Определить четверть, в которой находится точка, полученная поворотом точки $(1; 0)$ на угол α , если:

1) $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

3) $\alpha = 210^\circ$;

5) $\alpha = 735^\circ$;

2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$;

4) $\alpha = -210^\circ$;

6) $\alpha = 848^\circ$.

288. Определить знак числа $\sin \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$;

3) $\alpha = -\frac{5}{8}\pi$;

5) $\alpha = 740^\circ$;

2) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$;

4) $\alpha = -\frac{4}{3}\pi$;

6) $\alpha = 510^\circ$.

289. Определить знак числа $\cos \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{2}{3}\pi$; 3) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 5) $\alpha = 290^\circ$;

2) $\alpha = \frac{7}{6}\pi$; 4) $\alpha = -\frac{2}{5}\pi$; 6) $\alpha = -150^\circ$.

290. Определить знаки чисел $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{5}{6}\pi$; 3) $\alpha = -\frac{3}{5}\pi$; 5) $\alpha = 190^\circ$; 7) $\alpha = 172^\circ$;

2) $\alpha = \frac{12}{5}\pi$; 4) $\alpha = -\frac{5}{4}\pi$; 6) $\alpha = 283^\circ$; 8) $\alpha = 200^\circ$.

291. Определить знаки чисел $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если:

1) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 3) $\frac{7}{4}\pi < \alpha < 2\pi$;

2) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$; 4) $2\pi < \alpha < 2,5\pi$.

292. Определить знаки чисел $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если:

1) $\alpha = 1$; 2) $\alpha = 3$; 3) $\alpha = -3,4$; 4) $\alpha = -1,3$.

293. Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Определить знак числа:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$; 5) $\cos(\alpha - \pi)$; 7) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 4) $\sin(\pi - \alpha)$; 6) $\operatorname{tg}(\alpha - \pi)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

294. Найти все значения аргумента α , заключенные в промежутке от 0 до 2π , для которых знаки синуса и косинуса совпадают (различны).

295. Определить знак числа:

1) $\sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{3\pi}{4}}$; 4) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}$.

296. Сравнить значения выражений:

1) $\sin 0,7$ и $\sin 4$;

2) $\cos 1,3$ и $\cos 2,3$.

297. Решить уравнение:

1) $\sin(5\pi + x) = 1$; 3) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi + x\right) = -1$;

2) $\cos(x + 3\pi) = 0$; 4) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi + x\right) = -1$.

298. В какой четверти находится точка, соответствующая числу α , если:

1) $\sin \alpha + \cos \alpha = -1,4$;

2) $\sin \alpha - \cos \alpha = 1,4$?

299. (Задача Беруни.) Найти радиус Земли R , если известны $h = BC$ и угол $\alpha = \angle ABD$ (рис. 66).

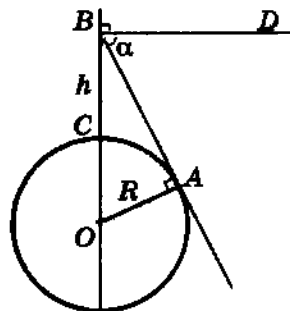


Рис. 66

§ 23

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СИНОСОМ, КОСИНУСОМ И ТАНГЕНСОМ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ УГЛА

Выясним зависимость между синусом и косинусом.

Пусть точка $M(x; y)$ единичной окружности получена поворотом точки $(1; 0)$ на угол α (рис. 67). Тогда по определению синуса и косинуса

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha.$$

Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты $(x; y)$ удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$.

Следовательно,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

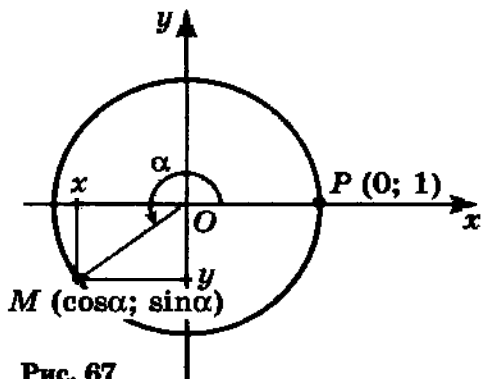


Рис. 67

Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется *основным тригонометрическим тождеством*.

Из равенства (1) можно выразить $\sin \alpha$ через $\cos \alpha$ и $\cos \alpha$ через $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (3)$$

В этих формулах знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

Задача 1. Вычислить $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Δ Воспользуемся формулой (2). Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin \alpha < 0$, поэтому в формуле перед корнем нужно поставить знак «минус»:

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}. \blacktriangle$$

Задача 2. Вычислить $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

Δ Так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, то $\cos \alpha > 0$, поэтому в формуле (3) перед корнем нужно поставить знак «плюс»:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \blacktriangle$$

Выясним теперь зависимость между тангенсом и котангенсом.

По определению тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Перемножая эти равенства, получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1. \quad (4)$$

Из равенства (4) можно выразить $\operatorname{tg} \alpha$ через $\operatorname{ctg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ через $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad (5)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (6)$$

Равенства (4)–(6) справедливы при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. Вычислить $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 13$.

△ По формуле (6) находим: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{13}$. ▲

Задача 4. Вычислить $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = 0,8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

△ По формуле (3) находим $\cos \alpha$. Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\cos \alpha < 0$.

Поэтому

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,64} = -0,6.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,8}{-0,6} = -\frac{4}{3}$. ▲

Используя основное тригонометрическое тождество и определение тангенса, найдем *зависимость между тангенсом и косинусом*.

△ Разделим обе части равенства $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ на $\cos^2 \alpha$, предполагая, что $\cos \alpha \neq 0$. Получим равенство $\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, откуда

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}}. \quad \blacktriangle \quad (7)$$

Эта формула верна, если $\cos \alpha \neq 0$, т. е. при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Из формулы (7) можно выразить тангенс через косинус и косинус через тангенс.

Задача 5. Вычислить $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

△ Из формулы (7) получаем:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{16}{9}.$$

Тангенс во второй четверти отрицателен, поэтому $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$. ▲

Задача 6. Вычислить $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

△ Из формулы (7) находим:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{10}.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos \alpha < 0$ и поэтому $\cos \alpha = -\sqrt{0,1}$. ▲

300. Вычислить:

- 1) $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{5}{18}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
- 2) $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = 0,8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
- 3) $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
- 4) $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
- 5) $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
- 6) $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

301. С помощью основного тригонометрического тождества выяснить, могут ли одновременно выполняться равенства:

- 1) $\sin \alpha = 1$ и $\cos \alpha = 1$;
- 3) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ и $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$;
- 2) $\sin \alpha = 0$ и $\cos \alpha = -1$;
- 4) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

302. Могут ли одновременно выполняться равенства:

- 1) $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$;
- 2) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ и $\cos \alpha = \frac{3}{4}$?

303. Пусть α — один из углов прямоугольного треугольника. Найти $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$.

304. Угол при вершине равнобедренного треугольника имеет тангенс, равный $2\sqrt{2}$. Найти косинус этого угла.

305. Найти $\cos \alpha$, если $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \frac{1}{8}$.

306. Найти:

- 1) $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$;
- 2) $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

307. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Найти значение выражения:

1) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha};$

3) $\frac{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha};$

2) $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha};$

4) $\frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}.$

308. Известно, что $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$. Найти значение выражения:

1) $\sin \alpha \cos \alpha;$

2) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha.$

309. Решить уравнение:

1) $2 \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$

3) $2 \cos^2 x - 1 = \cos x - 2 \sin^2 x;$

2) $\sin^2 x - 2 = \sin x - \cos^2 x;$

4) $3 - \cos x = 3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x.$

§ 24

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Задача 1. Доказать, что при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, справедливо равенство

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (1)$$

Δ По определению $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, и поэтому

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (2)$$

Эти преобразования верны, так как $\sin \alpha \neq 0$ при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ▲

Равенство (1) справедливо для всех допустимых значений α , т. е. таких, при которых его левая и правая части имеют смысл. Такие равенства называют *тождествами*, а задачи на доказательство таких равенств называют задачами на доказательство тождеств.

В дальнейшем при доказательстве тождеств мы не будем находить допустимые значения углов, если это не требуется в условии задачи.

Задача 2. Доказать тождество $\cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$.

$$\Delta (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha. \quad \blacktriangle$$

Задача 3. Доказать тождество $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}.$

△ Чтобы доказать это тождество, покажем, что разность между его левой и правой частями равна нулю:

$$\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha(1 - \sin \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha(1 - \sin \alpha)} = 0. \blacktriangle$$

При решении задач 1–3 использовались следующие *способы доказательства тождеств*: преобразование правой части к левой; преобразование левой части к правой; установление того, что разность между левой и правой частями равна нулю. Иногда удобно доказательство тождества провести преобразованием его левой и правой частей к одному и тому же выражению.

Задача 4. Доказать тождество $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$.

$$\triangle \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Тождество доказано, так как его левая и правая части равны $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. ▲

Задача 5. Упростить выражение $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$.

$$\triangle \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha. \blacktriangle$$

При решении задач на упрощение тригонометрических выражений мы не будем находить допустимые значения углов, если это не требуется в условии задачи.

У п р а ж н е н и я

310. Доказать тождество:

1) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$;

2) $2 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1$;

3) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$;

4) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

5) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = 1$;

6) $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} + \cos^2 \alpha = 1$.

311. Упростить выражение:

1) $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 2 \sin \alpha$;

3) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$;

2) $\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$;

4) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}$.

312. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\frac{\sin^2 \alpha - 1}{1 - \cos^2 \alpha}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

3) $\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

2) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

4) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

313. Доказать тождество:

1) $(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 1$; 2) $\sin^2 \alpha(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$.

314. Доказать, что при всех допустимых значениях α выражение принимает одно и то же значение, т. е. не зависит от α :

1) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha$;

3) $\left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$;

2) $\sin^2 \alpha(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)$;

4) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha$.

315. Доказать тождество:

1) $(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha) = \sin^2 2\alpha$;

2) $\frac{\sin \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = -\frac{1}{1 + \sin \alpha}$;

3) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;

4) $(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$;

5) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$;

6) $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$;

7) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 1$;

8) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$.

316. Упростить выражение и найти его числовое значение:

$$1) \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} - (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{3};$$

$$2) (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

317. Найти значение выражения $\sin \alpha \cos \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,6$.

318. Найти значение выражения $\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha$, если $\cos \alpha - \sin \alpha = 0,2$.

319. Решить уравнение:

$$1) 3\cos^2 x - 2\sin x = 3 - 3\sin^2 x;$$

$$2) \cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x - 1 - 2\sin^2 x.$$

§ 25 СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС УГЛОВ α И $-\alpha$

Пусть точки M_1 и M_2 единичной окружности получены поворотом точки $P(1; 0)$ на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис. 68). Тогда ось Ox делит угол M_1OM_2 пополам, и поэтому точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси Ox . Абсциссы этих точек совпадают, а ординаты отличаются только знаками. Точка M_1 имеет координаты $(\cos \alpha; \sin \alpha)$, точка M_2 имеет координаты $(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$. Следовательно,

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha. \quad (1)$$

Используя определение тангенса, получаем:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Аналогично,

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha. \quad (3)$$

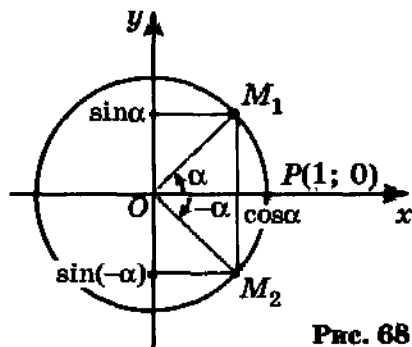


Рис. 68

Формулы (1) справедливы при любых α , а формулы (2) и (3) — при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Формулы (1)–(3) позволяют найти значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для отрицательных углов.

Например:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}; \quad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

У п р а ж н е н и я

320. Вычислить:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right);$

2) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2(-30^\circ)}{1 + \operatorname{ctg}^2(-30^\circ)};$

3) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right);$

4) $\cos(-\pi) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right).$

321. Упростить выражение:

1) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha;$

3) $\frac{\cos(-\alpha) + \sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha};$

2) $\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha(-\sin\alpha);$

4) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha) + \cos^2(-\alpha) + \sin^2\alpha.$

322. Доказать тождество $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha + \sin(-\alpha)} + \operatorname{tg}(-\alpha)\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$

323. Вычислить:

1) $\frac{3 - \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)};$

2) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 7,5\operatorname{tg}(-\pi) + \frac{1}{8}\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right).$

324. Упростить:

1) $\frac{\sin^3(-\alpha) + \cos^3(-\alpha)}{1 - \sin(-\alpha)\cos(-\alpha)};$

2) $\frac{1 - (\sin\alpha + \cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}.$

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$ и $\sin(\alpha \pm \beta)$ через косинусы и синусы углов α и β .



Теорема. Для любых α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (1)$$

○ Пусть точки M_α , $M_{-\beta}$ и $M_{\alpha+\beta}$ получены поворотом точки $M_0(1; 0)$ на углы α , $-\beta$, $\alpha + \beta$ соответственно (рис. 69).

По определению синуса и косинуса эти точки имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} M_\alpha &(\cos \alpha; \sin \alpha); \quad M_{-\beta}(\cos(-\beta); \sin(-\beta)); \\ M_{\alpha+\beta} &(\cos(\alpha + \beta); \sin(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

Так как $\angle M_0OM_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta}OM_\alpha$, то равнобедренные треугольники $M_0OM_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}OM_\alpha$ равны, и, значит, равны их основания $M_0M_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}M_\alpha$. Следовательно,

$$(M_0M_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta}M_\alpha)^2.$$

Используя формулу для расстояния между двумя точками, известную из курса геометрии, получаем:

$$(1 - \cos(\alpha + \beta))^2 + (\sin(\alpha + \beta))^2 = (\cos(-\beta) - \cos \alpha)^2 + (\sin(-\beta) - \sin \alpha)^2.$$

Преобразуем это равенство, используя формулы (1) из § 25:

$$\begin{aligned} 1 - 2\cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) &= \\ = \cos^2\beta - 2\cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + &+ 2\sin \beta \sin \alpha + \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$2 - 2\cos(\alpha + \beta) = 2 - 2\cos \alpha \cos \beta + 2\sin \alpha \sin \beta,$$

откуда $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$. ●

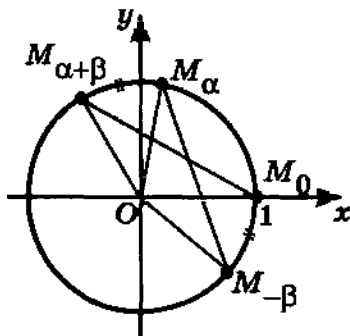


Рис. 69

Задача 1. Вычислить $\cos 75^\circ$.

Δ По формуле (1) находим:

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} . \blacktriangle\end{aligned}$$

Заменив в формуле (1) β на $-\beta$, получим:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta),$$

откуда



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

(2)

Задача 2. Вычислить $\cos 15^\circ$.

Δ По формуле (2) получаем:

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} . \blacktriangle\end{aligned}$$

Задача 3. Доказать формулы

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha . \quad (3)$$

Δ При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ по формуле (2) получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \beta + \sin \frac{\pi}{2} \sin \beta = \sin \beta,$$

т. е.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta . \quad (4)$$

Заменив в этой формуле β на α , получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha .$$

Полагая в формуле (4) $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, имеем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha . \blacktriangle$$

Используя формулы (1)–(4), выведем *формулы сложения для синуса*:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Таким образом,

!

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$

(5)

Заменяя в формуле (5) β на $-\beta$, получаем:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta),$$

откуда

!

$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$

(6)

Задача 4. Вычислить $\sin 210^\circ$.

$$\begin{aligned}\Delta \sin 210^\circ &= \sin(180^\circ + 30^\circ) = \\ &= \sin 180^\circ \cos 30^\circ + \cos 180^\circ \sin 30^\circ = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \blacktriangle\end{aligned}$$

Задача 5. Вычислить $\sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7}$.

$$\Delta \sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} = \sin\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \pi = 0. \blacktriangle$$

Задача 6. Доказать равенство

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (7)$$

$$\Delta \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель этой дроби на произведение $\cos \alpha \cos \beta$, получим формулу (7). $\blacktriangle$

Формула (7) может быть полезна при вычислениях.

Например, по этой формуле находим:

$$\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 180^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 180^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = 1.$$

С помощью формул сложения вычислить (325–327).

325. 1) $\cos 135^\circ$; 2) $\cos 120^\circ$; 3) $\cos 150^\circ$; 4) $\cos 240^\circ$.

326. 1) $\cos 57^\circ 30' \cos 27^\circ 30' + \sin 57^\circ 30' \sin 27^\circ 30'$;

2) $\cos 19^\circ 30' \cos 25^\circ 30' - \sin 19^\circ 30' \sin 25^\circ 30'$;

3) $\cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{11\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} \sin \frac{11\pi}{9}$;

4) $\cos \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}$.

327. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, если $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $8 \cos \alpha = -\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Упростить выражение (328–329).

328. 1) $\cos 3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha$;

2) $\cos 5\beta \cos 2\beta + \sin 5\beta \sin 2\beta$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7} + \alpha\right) \cos\left(\frac{5\pi}{14} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7} + \alpha\right) \sin\left(\frac{5\pi}{14} - \alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5} + \alpha\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{5} + \alpha\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right)$.

329. 1) $\cos(\alpha + \beta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \cos(\alpha - \beta)$.

С помощью формул сложения вычислить (330–331).

330. 1) $\sin 73^\circ \cos 17^\circ + \cos 73^\circ \sin 17^\circ$; 3) $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$;

2) $\sin 73^\circ \cos 13^\circ - \cos 73^\circ \sin 13^\circ$; 4) $\sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$.

331. 1) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

332. Упростить выражение:

- 1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \sin(\alpha - \beta)$;
2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta) - \sin(\alpha - \beta)$; 4) $\sin(\alpha + \beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)$.
-

**333. Вычислить $\cos(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{8}{2}\pi < \alpha < 2\pi$,
и $\sin \beta = \frac{8}{17}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.**

**334. Вычислить $\sin(\alpha - \beta)$, если $\cos \alpha = -0,8$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\sin \beta = -\frac{12}{13}$,
 $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.**

335. Упростить выражение:

- 1) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $\frac{2 \cos \alpha \sin \beta + \sin(\alpha - \beta)}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)}$;
2) $\sin\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; 4) $\frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta}$.

336. Доказать тождество:

- 1) $\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$;
2) $\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$;

3)
$$\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sqrt{3} \sin \alpha} = -\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$$
;

4)
$$\frac{\cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} \sin \alpha} = -\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$$
.

337. Упростить выражение:

- 1) $\frac{\operatorname{tg} 29^\circ + \operatorname{tg} 31^\circ}{1 - \operatorname{tg} 29^\circ \operatorname{tg} 31^\circ}$; 2) $\frac{\operatorname{tg} \frac{7}{16}\pi - \operatorname{tg} \frac{3}{16}\pi}{1 + \operatorname{tg} \frac{7}{16}\pi \cdot \operatorname{tg} \frac{3}{16}\pi}$.

Выведем формулы синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения.

$$1) \sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha.$$

Итак,

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$

(1)

Задача 1. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Δ По формуле (1) находим:

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot (-0,6) \cdot \cos \alpha = -1,2\cos \alpha.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos \alpha < 0$, и поэтому

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,36} = -0,8.$$

Следовательно, $\sin 2\alpha = -1,2 \cdot (-0,8) = 0,96$. ▲

$$2) \cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Итак,

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$

(2)

Задача 2. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,3$.

Δ Используя формулу (2) и основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \\ &= 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot (0,3)^2 - 1 = -0,82. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Задача 3. Упростить выражение $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha}$.

$$\begin{aligned} \Delta \quad \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha} &= \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Задача 4. Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Δ Полагая в формуле $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ (см. § 26) $\beta = \alpha$, получаем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (3)$$

Если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, то по формуле (3) находим: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$. $\blacktriangle$

У п р а ж н е н и я

Вычислить (338–339).

338. 1) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$;

3) $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$;

2) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

4) $(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2$.

339. 1) $2\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$;

3) $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$;

2) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$;

4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}\right)^2$.

340. Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

341. Вычислить $\cos 2\alpha$, если:

1) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$;

2) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

Упростить выражение (342–343).

342. 1) $\sin \alpha \cos \alpha$;

3) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$;

2) $\cos \alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

4) $\sin 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.

343. 1) $\frac{\cos 2\alpha + 1}{2\cos \alpha}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$; 3) $\frac{\sin^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}$; 4) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$.

344. Доказать тождество:

1) $\sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$;

3) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$;

2) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;

4) $2\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 1$.

345. Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$;

2) $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{1}{8}$.

346. Доказать тождество:

1) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$;

2) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$.

347. Вычислить:

1) $2\cos^2 15^\circ - 1$;

3) $2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$;

2) $1 - 2\sin^2 22,5^\circ$;

4) $1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{12}$.

348. Упростить выражение:

1) $1 - 2\sin^2 5\alpha$;

3) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$;

2) $2\cos^2 3\alpha - 1$;

4) $\frac{2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\sin 2\alpha}$.

349. Доказать тождество:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha - 1$;

3) $\operatorname{tg} \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$;

2) $\frac{\sin 2\alpha - 2\cos \alpha}{\sin \alpha - \sin^2 \alpha} = -2\operatorname{ctg} \alpha$;

4) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.

350. Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$.

351. Вычислить: 1) $\frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$;

2) $\frac{6\operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$.

§ 28

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса составляются для углов от 0° до 90° (или от 0 до $\frac{\pi}{2}$). Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для острых углов.

Задача 1. Вычислить $\sin 870^\circ$ и $\cos 870^\circ$.

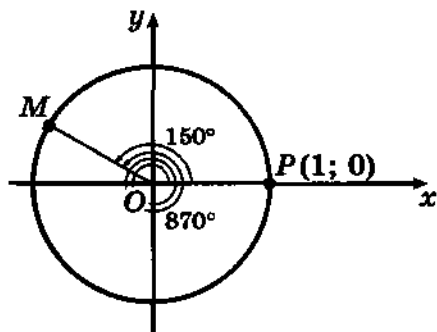


Рис. 70

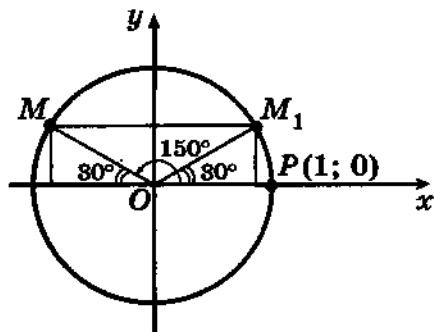


Рис. 71

Δ Заметим, что $870^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 150^\circ$. Следовательно, при повороте точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол 870° точка совершит два полных оборота и еще повернется на угол 150° , т. е. получится та же самая точка M , что и при повороте на угол 150° (рис. 70). Поэтому $\sin 870^\circ = \sin 150^\circ$, $\cos 870^\circ = \cos 150^\circ$. Построим точку M_1 , симметричную точке M относительно оси Oy (рис. 71). Ординаты точек M и M_1 одинаковы, а абсциссы отличаются только знаком. Поэтому $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\sin 870^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 870^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\blacktriangle$

При решении задачи 1 использовались равенства

$$\sin(2 \cdot 360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ, \cos(2 \cdot 360^\circ + 150^\circ) = \cos 150^\circ, \quad (1)$$

$$\sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ, \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ. \quad (2)$$

Равенства (1) верны, так как при повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол α .

Следовательно верны формулы:

!

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha, \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha, k \in \mathbb{Z}.$$

(3)

В частности, при $k = 1$ справедливы равенства:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha, \cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha.$$

Равенства (2) являются частными случаями формул

!

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$$

(4)

Докажем формулу $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

○ Применяя формулу сложения для синуса, получаем:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \cos \pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha - (-1) \cdot \sin \alpha = \sin \alpha. \bullet$$

Аналогично доказывается и вторая из формул (4). Формулы (4) называются *формулами приведения*. С помощью формул (3) и (4) можно свести вычисление синуса и косинуса любого угла к их значениям для острого угла.

Задача 2. Вычислить $\sin 930^\circ$.

△ Используя формулы (3), получаем:

$$\sin 930^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ - 150^\circ) = \sin(-150^\circ).$$

По формуле $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ получим $\sin(-150^\circ) = -\sin 150^\circ$.

По формуле (4) находим:

$$-\sin 150^\circ = -\sin(180^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\sin 930^\circ = -\frac{1}{2}$. ▲

Задача 3. Вычислить $\cos \frac{15\pi}{4}$.

$$\triangle \cos \frac{15\pi}{4} = \cos(4\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \blacktriangle$$

Покажем теперь, как можно свести вычисление тангенса любого угла к вычислениям тангенса острого угла.

Заметим, что из формул (3) и определения тангенса следует равенство $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg} \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Используя это равенство и формулы (4), получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \pi) &= \operatorname{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \\ &= -\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = -\frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Следовательно, справедлива формула

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg} \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Задача 4. Вычислить: 1) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{3}$; 2) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{4}$.

$$\triangle 1) \operatorname{tg} \frac{11\pi}{3} = \operatorname{tg} \left(4\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3};$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg} \left(3\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} = 1. \blacktriangle$$

В § 26 были доказаны формулы

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha, \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha,$$

которые также называют *формулами приведения*. Например, используя эти формулы, получаем $\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6}$.

Для любого значения x справедливы формулы $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Из этих равенств следует, что значения синуса и косинуса периодически повторяются при изменении аргумента на 2π . Такие функции называются *периодическими с периодом 2π* .



Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции $y = f(x)$ выполняется равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T называется *периодом* функции $f(x)$.

Из этого определения следует, что если x принадлежит области определения функции $f(x)$, то числа $x + T$, $x - T$ и, вообще, числа $x + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$ также принадлежат области определения этой периодической функции и $f(x + Tn) = f(x)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что число 2π является *наименьшим положительным периодом* функции $y = \cos x$.

○ Пусть $T > 0$ — период косинуса, т. е. для любого x выполняется равенство $\cos(x + T) = \cos x$. Положив $x = 0$, получим $\cos T = 1$. Отсюда $T = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как $T > 0$, то T может принимать значения 2π , 4π , 6π , ..., и поэтому период не может быть меньше 2π . ●

Можно доказать, что *наименьший положительный период функции $y = \sin x$ также равен 2π* .

Вычислить (352–355):

- 352.** 1) $\sin \frac{13}{2} \pi$; 3) $\cos 7\pi$; 5) $\sin 720^\circ$;
 2) $\sin 17\pi$; 4) $\cos \frac{11}{2} \pi$; 6) $\cos 540^\circ$.
- 353.** 1) $\cos 420^\circ$; 3) $\sin 3630^\circ$; 5) $\sin \frac{13\pi}{6}$;
 2) $\operatorname{tg} 570^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 960^\circ$; 6) $\operatorname{tg} \frac{11}{6} \pi$.
- 354.** 1) $\cos 150^\circ$; 2) $\sin 135^\circ$; 3) $\cos 120^\circ$; 4) $\sin 315^\circ$.
- 355.** 1) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$; 3) $\cos \frac{5\pi}{3}$; 5) $\cos \left(-\frac{7\pi}{3}\right)$;
 2) $\sin \frac{7\pi}{6}$; 4) $\sin \left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 6) $\operatorname{tg} \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

356. Найти числовое значение выражения:

- 1) $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \operatorname{ctg} 1125^\circ$;
 2) $\operatorname{tg} 1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ$;
 3) $\sin(-7\pi) - 2 \cos \frac{31\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$;
 4) $\cos(-9\pi) + 2 \sin \left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg} \left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

357. Упростить выражение:

- 1) $\cos^2(\pi - \alpha) + \sin^2(\alpha - \pi)$;
 2) $\cos(\pi - \alpha)\cos(3\pi - \alpha) - \sin(\alpha - \pi)\sin(\alpha - 3\pi)$.

358. Вычислить:

- 1) $\cos 7230^\circ + \sin 900^\circ$; 4) $\sqrt{2} \cos 4,25\pi - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{61\pi}{6}$;
 2) $\sin 300^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ$; 5) $\frac{\sin(-6,5\pi) + \operatorname{tg}(-7\pi)}{\cos(-7\pi) + \operatorname{ctg}(-16,25\pi)}$;
 3) $2 \sin 6,5\pi - \sqrt{3} \sin \frac{19\pi}{3}$; 6) $\frac{\cos(-540^\circ) + \sin 480^\circ}{\operatorname{tg} 405^\circ - \operatorname{ctg} 330^\circ}$.

359. Упростить выражение:

$$1) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)};$$

$$3) \frac{\sin(\alpha-\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)};$$

$$2) \frac{\cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)};$$

$$4) \frac{\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)} \cdot \operatorname{tg}(\pi-\alpha).$$

360. Доказать, что синус суммы двух внутренних углов треугольника равен синусу третьего внутреннего угла.

Доказать тождество:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos \alpha;$$

$$3) \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\sin \alpha;$$

$$2) \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin \alpha;$$

$$4) \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\cos \alpha.$$

362. Решить уравнение:

$$1) \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 1;$$

$$3) \cos(x-\pi) = 0;$$

$$2) \sin(\pi-x) = 1;$$

$$4) \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

§ 29

СУММА И РАЗНОСТЬ СИНУСОВ. СУММА И РАЗНОСТЬ КОСИНУСОВ

Задача 1. Упростить выражение:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

Δ Используя формулу сложения и формулу двойного угла, получим:

$$\begin{aligned} & \left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12} = \\ & = \left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{12} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{12} + \sin \alpha \cos \frac{\pi}{12} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{12}\right)\sin \frac{\pi}{12} = \\ & = 2 \sin \alpha \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \sin \alpha \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sin \alpha. \blacktriangle \end{aligned}$$

Если воспользоваться *формулой суммы синусов*

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (1)$$

эту задачу можно решить проще. С помощью этой формулы получаем:

$$\left(\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{12} \right) + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{12} \right) \right) \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \alpha \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \alpha.$$

Докажем теперь справедливость формулы (1).

○ Обозначим $\frac{\alpha + \beta}{2} = x$, $\frac{\alpha - \beta}{2} = y$. Тогда $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$ и поэтому $\sin \alpha + \sin \beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2 \sin x \cos y = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$. ●

Наряду с формулой (1) используются *формулы разности синусов, формулы суммы и разности косинусов*:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (2)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (3)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) доказываются аналогично формуле (1); формула (2) получается из формулы (1) заменой β на $-\beta$ (*докажите самостоятельно*).

Задача 2. Вычислить $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ$.

$$\Delta \sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \sin 75^\circ + \sin 15^\circ =$$

$$= 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ =$$

$$2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \blacktriangle$$

Задача 3. Записать в виде произведения $2\sin\alpha + \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}\Delta \quad 2\sin\alpha + \sqrt{3} &= 2\left(\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 4\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right). \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Задача 4. Доказать, что наименьшее значение выражения $\sin\alpha + \cos\alpha$ равно $-\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}$.

Δ Преобразуем данное выражение в произведение:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Так как наименьшее значение косинуса равно -1 , а наибольшее равно 1 , находим, что наименьшее значение данного выражения равно $\sqrt{2} \cdot (-1) = -\sqrt{2}$, а наибольшее значение равно $\sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$. $\blacktriangle$

У п р а ж н е н и я

363. Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$;

4) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

364. Вычислить:

1) $\cos 105^\circ + \cos 75^\circ$;

4) $\cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}$;

2) $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ$;

5) $\sin \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$;

3) $\cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}$;

6) $\sin 105^\circ + \sin 165^\circ$.

365. Записать в виде произведения:

1) $1 + 2\sin\alpha$; 2) $1 - 2\sin\alpha$; 3) $1 + 2\cos\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha$.

366. Доказать тождество:

1) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

2) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$.

367. Упростить выражение:

1) $\frac{2(\cos \alpha + \cos 3\alpha)}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$;

2) $\frac{1 + \sin \alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1}$.

Доказать тождество (368–369).

368. 1) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2} \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos \alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = 0$.

369. 1) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2 \sin^2 2\alpha} = 2 \sin \alpha$;

2) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$.

370. Записать в виде произведения:

1) $\cos 22^\circ + \cos 24^\circ + \cos 26^\circ + \cos 28^\circ$; 2) $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6}$.

371. Доказать тождество $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$ и вычислить:

1) $\operatorname{tg} 267^\circ + \operatorname{tg} 93^\circ$;

2) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{12}$.

372. Разложить на множители:

1) $1 - \cos \alpha + \sin \alpha$;

3) $1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha$;

2) $1 - 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha$;

4) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

373. Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Определить четверть, в которой лежит точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

1) $\frac{\pi}{2} - \alpha$; 2) $\alpha - \pi$; 3) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$; 4) $\frac{\pi}{2} + \alpha$; 5) $\alpha - \frac{\pi}{2}$; 6) $\pi - \alpha$.

374. Найти значение синуса и косинуса угла:

1) 3π ;

3) $3,5\pi$;

5) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

2) 4π ;

4) $\frac{5}{2}\pi$;

6) $(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

375. Вычислить:

- 1) $\sin 3\pi - \cos \frac{3\pi}{2}$;
- 2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3,5\pi$;
- 3) $\sin \pi k + \cos 2\pi k$, где k — целое число;
- 4) $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin \frac{(4k+1)\pi}{2}$, где k — целое число.

376. Найти:

- 1) $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
- 2) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
- 3) $\sin \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
- 4) $\sin \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

377. Доказать тождество:

- 1) $5\sin^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha + 5 \cos^2 \alpha = 5 + \sin \alpha$;
- 2) $\operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha - 2 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = \cos \alpha - 2$;
- 3) $\frac{3}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 3 \cos^2 \alpha$;
- 4) $\frac{5}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 5 \sin^2 \alpha$.

378. Упростить выражение:

- 1) $2 \sin(-\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2 \cos(-\alpha) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
- 2) $3 \sin(\pi - \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 3 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
- 3) $(1 - \operatorname{tg}(-\alpha))(1 - \operatorname{tg}(\pi + \alpha)) \cos^2 \alpha$;
- 4) $(1 + \operatorname{tg}^2(-\alpha)) \left(\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(-\alpha)} \right)$.

379. Упростить выражение и найти его числовое значение:

- 1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$, если $\cos \alpha = \frac{1}{4}$;
- 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = \frac{1}{6}$.

380. Вычислить:

- 1) $2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ$;
- 2) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$;
- 3) $\sin 15^\circ$;
- 4) $\sin 75^\circ$.

Проверьте себя!

1. Вычислить $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2. Найти значение выражения:

1) $4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\pi$;

2) $\cos 150^\circ$; 3) $\sin \frac{8\pi}{3}$; 4) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$; 5) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$.

3. (Задача аль-Каши.) Доказать: $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

4. Доказать тождество:

1) $3 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2$; 2) $1 - \sin\alpha \cos\alpha \operatorname{ctg}\alpha = \sin^2\alpha$.

5. Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha - \beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)$;

2) $\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\cos(\pi - \alpha) + \sin(4\pi + \alpha)$.

381. Упростить выражение:

1) $\cos^2(\pi - \alpha) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 3) $\frac{\cos^2(2\pi + \alpha) - \sin^2(\alpha + 2\pi)}{2\cos(\alpha + 2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$;

2) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 4) $\frac{2\sin(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\alpha - \pi)}$.

Вычислить (382–383).

382. 1) $\sin \frac{47\pi}{6}$; 2) $\operatorname{tg} \frac{25\pi}{4}$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos \frac{21\pi}{4}$.

383. 1) $\cos \frac{23\pi}{4} - \sin \frac{15\pi}{4}$; 3) $3\cos 3660^\circ + \sin(-1560^\circ)$;

2) $\sin \frac{25\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{10\pi}{3}$; 4) $\cos(-945^\circ) + \operatorname{tg} 1035^\circ$.

384. Сравнить числа.

1) $\sin 3$ и $\cos 4$; 2) $\cos 0$ и $\sin 5$.

385. Определить знак числа:

1) $\sin 3,5 \operatorname{tg} 3,5$;

3) $\frac{\operatorname{tg} 13}{\cos 15}$;

2) $\cos 5,01 \sin 0,73$;

4) $\sin 1 \cos 2 \operatorname{tg} 3$.

386. Вычислить:

1) $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$;

4) $\sin \frac{\pi}{12}$;

2) $\sin 165^\circ$;

5) $1 - 2 \sin^2 195^\circ$;

3) $\sin 105^\circ$;

6) $2 \cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1$.

387. Упростить выражение:

1) $(1 + \operatorname{tg}(-\alpha))(1 - \operatorname{ctg}(-\alpha)) - \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos \alpha + \sin(-\alpha)} + \frac{\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin \alpha}$.

388. Дано: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{8}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислить значения $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$.

Упростить выражение (389–391).

389. 1) $\cos^3 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha$;

2) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$.

390. 1) $\frac{\sin 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{4 \cos \alpha}$;

3) $\frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1}$;

2) $\frac{2 \cos^2 2\alpha}{\sin 4\alpha \cos 4\alpha + \sin 4\alpha}$;

4) $\frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha - \cos 2\alpha}$.

391. 1) $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} - \sin(\pi - x)$;

3) $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} - \sin(1,5\pi + x)$;

2) $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} + \cos(1,5\pi + x)$;

4) $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} + \cos(3\pi - x)$.

392. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ и $\operatorname{tg} \beta = 2,4$;

2) $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$ и $\operatorname{ctg} \beta = -1$.

393. Упростить выражение:

1) $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$;

2) $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$.

1. Найти радианную меру угла 153° .

- A) $\frac{17\pi}{20}$; B) $\frac{19\pi}{20}$; C) 17π ; D) $\frac{2\pi}{9}$; E) $\frac{153}{\pi}$.

2. Найти градусную меру угла $0,65\pi$.

- A) $11,7^\circ$; B) 117° ; C) 116° ; D) 118° ; E) $117,5^\circ$.

3. Какое произведение отрицательно?

- A) $\cos 314^\circ \sin 147^\circ$; D) $\sin 170^\circ \operatorname{ctg} 250^\circ$;
B) $\operatorname{tg} 200^\circ \operatorname{ctg} 201^\circ$; E) $\cos 215^\circ \operatorname{tg} 315^\circ$.
C) $\cos 163^\circ \cos 295^\circ$;

4. Какое произведение положительно?

- A) $\sin 2^\circ \cos 2^\circ \sin 1^\circ \sin 1^\circ$; D) $\cos 10^\circ \cos 10^\circ \cos 11^\circ \cos \sqrt{11}$;
B) $\operatorname{tg} 8^\circ \operatorname{ctg} 8^\circ \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{ctg} \sqrt{10}$; E) $\operatorname{tg} 7,5^\circ \cdot \operatorname{tg} 7,5^\circ \cdot \operatorname{ctg} 3^\circ \operatorname{ctg} 3^\circ$.
C) $\sin 9^\circ \sin 9^\circ \cos 9^\circ \cos 9^\circ$;

5. Найти все углы, на которые нужно повернуть точку $(1; 0)$ для того, чтобы попасть в точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

- A) $30^\circ + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; C) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; E) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
B) $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; D) $2\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

6. Найти координаты точки, в которую попадет точка $(1; 0)$ после поворота на угол $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

- A) $(0; 1)$; B) $(0; -1)$; C) $(1; 0)$; D) $(-1; 0)$; E) $(0; \frac{\pi}{2})$.

7. Записать числа в порядке возрастания: $a = \sin 1,57$; $b = \cos 1,58$; $c = \sin 3$.

- A) $a < c < b$; C) $c < a < b$; E) $a < b < c$.
B) $b < c < a$; D) $b < a < c$;

8. Записать числа в порядке убывания: $a = \cos 2$; $b = \cos 2^\circ$; $c = \sin 2$; $d = \sin 2^\circ$.
- A) $a > c > d > b$; D) $c > d > b > a$;
 B) $d > c > b > a$; E) $d > a > b > c$.
 C) $b > c > d > a$;
9. Вычислить $\frac{\sin 136^\circ \cdot \cos 46^\circ - \sin 46^\circ \cdot \cos 224^\circ}{\sin 110^\circ \cdot \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \cdot \cos 50^\circ}$.
- A) $\cos 40^\circ$; B) 0,5; C) $\sin 44^\circ$; D) 2; E) -2.
10. Вычислить $\frac{\sin 10^\circ \cdot \cos 130^\circ - \sin 10^\circ \cdot \cos 220^\circ}{\sin 153^\circ \cdot \cos 147^\circ - \sin 27^\circ \cdot \cos 33^\circ}$.
- A) $\sin 80^\circ$; B) -1; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; E) 1.
11. Вычислить $\cos(-225^\circ) + \sin 675^\circ + \operatorname{tg}(-1035^\circ)$.
- A) 1; B) -1; C) $\sqrt{2}$; D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
12. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, если $\sin \alpha = 0,6$.
- A) 3,42; B) $3\frac{3}{7}$; C) $\frac{7}{24}$; D) $-\frac{7}{24}$; E) 0,96.
13. Найти $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$.
- A) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; B) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; D) $\sqrt{5}$; E) $\frac{\sqrt{5}}{6}$.
14. Найти $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{7}$.
- A) $\frac{4}{3}$; B) $-\frac{4}{3}$; C) $\frac{3}{4}$; D) $-\frac{3}{4}$; E) $-1\frac{1}{4}$.
15. Упростить выражение $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)}$.
- A) $\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$; B) 1; C) 0,5; D) $-\frac{1}{2}$; E) -1.
16. Упростить выражение $\frac{\sin 2\alpha + \sin(\pi - \alpha) \cdot \cos \alpha}{\sin(\pi - \alpha)}$.

A) $3 \cos \alpha$; B) $\frac{1}{3} \sin \alpha$; C) $-\sin \alpha$; D) $\frac{1}{3} \cos \alpha$; E) $3 \sin 2\alpha$.

17. Вычислить $\frac{4 \sin^4 \alpha}{5 \sin^2 \alpha + 15 \cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{7}$.

A) 0,59; B) 0,49; C) -0,49; D) 0,2; E) $\frac{\sqrt{7}}{20}$.

18. Найти $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, если $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$.

A) $\frac{81}{49}$; B) $-\left(\frac{7}{9}\right)^2$; C) $\frac{49}{81}$; D) $-1\frac{32}{49}$; E) $\frac{2}{81}$.

19. Вычислить $\sin 100^\circ \cdot \cos 440^\circ + \sin 800^\circ \cdot \cos 460^\circ$.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) 1; C) -1; D) 0; E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. Упростить $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}$.

A) $\sin \alpha \cos \alpha$; B) $-2 \sin 4\alpha$; C) $\sin 4\alpha$; D) $2 \cos 2\alpha$; E) $4 \cos 2\alpha$.

21. Найти $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha$ и $\sin \beta$ — корни квадратного уравнения $8x^2 - 6x + 1 = 0$, α, β — углы в первой четверти.

A) $\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{8}$; B) $\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$; C) $\frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{5})}{18}$.

D) $-\frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{5})}{16}$;

22. Найти $\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ — корни квадратного уравнения $6x^2 - 5x + 1 = 0$, α, β — углы в первой четверти.

A) $\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$; B) $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$; C) $\frac{2\sqrt{6}-1}{7}$; D) $\frac{1-2\sqrt{6}}{5}$; E) $\frac{1}{6}$.

23. Решить уравнение $2(x + \sqrt{2}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha)$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; B) $\sqrt{2}$; C) $-\sqrt{2}$; D) $2\sqrt{2}$; E) $-2\sqrt{2}$.

24. Найти $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, если $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ — корни квадратного уравнения $x^2 - 7x + 12 = 0$:

A) 1; B) $\frac{7}{11}$; C) $\sqrt{3}$; D) $-\frac{7}{11}$; E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Задачи Абу Райхана Беруни.

1. Из некоторой точки A верхнего края колодца, имеющего форму цилиндра, его дно видно под углом α , а из точки B , расположенной на продолжении стенки колодца, (рис. 72) — под углом β . Найти глубину колодца, если $AB = a$.

Дано: $\angle CAD = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $AB = a$.

Найти: AC .

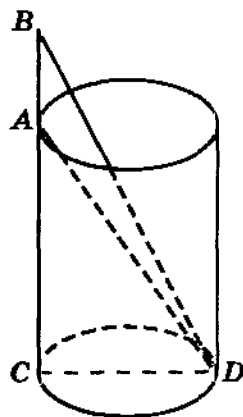


Рис. 72

2. Из точки A минарет виден под углом α , из точки B под углом β (рис. 73). Найти высоту минарета, если $AB = a$.

Дано: $\angle CAD = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $AB = a$.

Найти: $CD = ?$

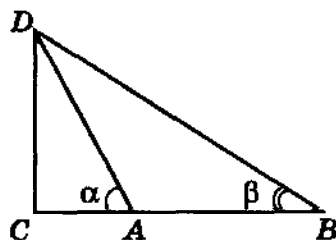


Рис. 73

Задача аль-Каши.

3. Доказать, что для любого угла α верно равенство

$$\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{2}}.$$

Задача аль-Бузджани.

4. Доказать, что для любых α и β верно равенство

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} - \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}.$$



Мирзо Улугбек
(1394–1449)

Выдающиеся средневековые ученые Мухаммед аль-Хорезми, Ахмад аль-Фергани, Абу Райхан Беруни, Улугбек, аль-Каши, Али Кушчи внесли большой вклад в развитие математики и, в частности, тригонометрии. Определение координат светил на небесной сфере, наблюдение за движением планет, предсказание солнечных и лунных затмений требовало составления астрономических (в частности, тригонометрических) таблиц, которые на арабском Востоке назывались "Зиджами".

Составленные ими руководства, переведенные на латынь и другие европейские языки, оказали большое влияние на развитие математики и астрономии в средневековой Европе.

В "Каноне Масуда" Абу Райхана Беруни имеются составленные с точностью до 10^{-8} таблицы синусов с интервалом в 1° .

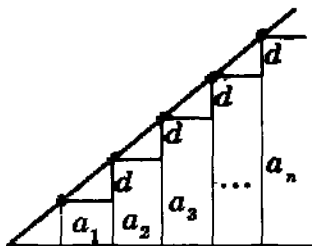
Наиболее точным для своего времени считался зидж Улугбека — «Гураганский зидж». В нем имелись составленные с точностью до 10^{-10} таблицы синусов с интервалом в 1 минуту, таблицы тангенсов от 0° до 45° с интервалом в 1 минуту и от 46° до 90° с интервалом в 5 минут.

В "Трактате о хорде и синусе" аль-Каши вычислен $\sin 1^\circ$ с 17 верными знаками после запятой:

$$\sin 1^\circ = 0,017452406437283512...$$

Аль-Каши в своем "Трактате об окружности" получил приближенное значение для 2π , полагая, что длина окружности радиуса 1 есть среднее арифметическое периметров правильных вписанного и описанного $3 \cdot 2^n$ -угольников, где $n = 28$:

$$2\pi = 6,2831853071795865...$$



§ 30

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Рассмотрим следующую задачу.

Задача. Готовясь к экзамену, ученик запланировал каждый день решать по 5 тестовых задач. Как изменяется каждый день число решенных им задач?

Число запланированных задач изменяется каждый день следующим образом:

1-й день	2-й день	3-й день	4-й день	...
5	10	15	20	...

Получаем в результате следующую последовательность:

$$5, 10, 15, 20, 25, \dots$$

Обозначим через a_n число задач, которые надо решить в n -й день. Например:

$$a_1 = 5, a_2 = 10, a_3 = 15, \dots$$

Полученные числа образуют *числовую последовательность*

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

В этой последовательности каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 5. Такую последовательность называют *арифметической прогрессией*.



Определение. Числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называется *арифметической прогрессией*, если для всех натуральных чисел n выполняется равенство

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где d — некоторое число.

Из этой формулы следует, что $a_{n+1} - a_n = d$. Число d называют *разностью арифметической прогрессии*.

Примеры.

1) Натуральный ряд чисел $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ является арифметической прогрессией. Разность этой прогрессии $d = 1$.

2) Последовательность целых отрицательных чисел $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$ — арифметическая прогрессия с разностью $d = -1$.

3) Последовательность $3, 3, 3, \dots, 3, \dots$ — арифметическая прогрессия с разностью $d = 0$.

Задача 1. Доказать, что последовательность, заданная формулой $a_n = 1,5 + 3n$, является арифметической прогрессией.

Δ Требуется доказать, что разность $a_{n+1} - a_n$ одна и та же для всех n (не зависит от n).

Запишем $(n + 1)$ -й член этой последовательности:

$$a_{n+1} = 1,5 + 3(n + 1).$$

Поэтому

$$a_{n+1} - a_n = 1,5 + 3(n + 1) - (1,5 + 3n) = 3.$$

Следовательно, разность $a_{n+1} - a_n$ не зависит от n . $\blacktriangle$

По определению арифметической прогрессии $a_{n+1} = a_n + d$, $a_{n-1} = a_n - d$, откуда

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n > 1.$$



Таким образом, каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов. Этим объясняется название «арифметическая» прогрессия.

Отметим, что если a_1 и d заданы, то остальные члены арифметической прогрессии можно вычислить по рекуррентной формуле $a_{n+1} = a_n + d$. Таким способом нетрудно вычислить несколько первых членов прогрессии, однако, например, для a_{100} уже потребуются много вычислений. Обычно для этого используется формула n -го члена.

По определению арифметической прогрессии

$$a_2 = a_1 + d; \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \text{ и т. д.}$$



Вообще

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad (1)$$

так как n -й член арифметической прогрессии получается из первого члена прибавлением $(n - 1)$ раз числа d .

Формулу (1) называют *формулой n -го члена арифметической прогрессии*.

Задача 2. Найти сотый член арифметической прогрессии, если $a_1 = -6$ и $d = 4$.

△ По формуле (1) имеем $a_{100} = -6 + (100 - 1) \cdot 4 = 390$. ▲

Задача 3. Число 99 является членом арифметической прогрессии 3, 5, 7, 9, Найти номер этого члена.

△ Пусть n — искомый номер. Так как $a_1 = 3$ и $d = 2$, то по формуле $a_n = a_1 + (n - 1)d$ имеем $99 = 3 + (n - 1) \cdot 2$. Поэтому $99 = 3 + 2n - 2$; $98 = 2n$, $n = 49$.

Ответ: $n = 49$. ▲

Задача 4. В арифметической прогрессии $a_8 = 130$ и $a_{12} = 166$. Найти формулу n -го члена.

△ Используя формулу (1), находим:

$$a_8 = a_1 + 7d, \quad a_{12} = a_1 + 11d.$$

Подставив данные значения a_8 и a_{12} , получим систему уравнений относительно a_1 и d :

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 130, \\ a_1 + 11d = 166. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$4d = 36, \quad d = 9.$$

Следовательно, $a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67$.

Запишем формулу n -го члена:

$$a_n = 67 + 9(n - 1) = 67 + 9n - 9 = 58 + 9n.$$

Ответ: $a_n = 9n + 58$. ▲

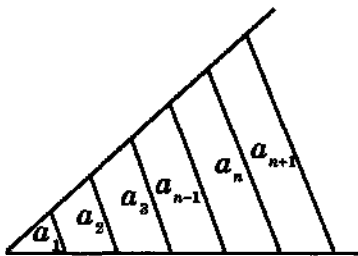


Рис. 74

Задача 5. На стороне угла откладываются от его вершины равные отрезки. Через их концы проводятся параллельные прямые (рис. 74). Доказать, что длины $a_1, a_2, a_3, \dots$ отрезков этих прямых, заключенных между сторонами угла, образуют арифметическую прогрессию.

Δ В трапеции с основаниями a_{n-1} и a_{n+1} средняя линия равна a_n . Поэтому

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Отсюда $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, или $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$.

Так как разность между каждым членом последовательности и предшествующим ему членом одна и та же, то эта последовательность — арифметическая прогрессия. $\blacktriangle$

У п р а ж н е н и я

394. (Устно.) Назвать первый член и разность арифметической прогрессии:

1) $6, 8, 10, \dots$;

3) $25, 21, 17, \dots$;

2) $7, 9, 11, \dots$;

4) $-12, -9, -6, \dots$.

395. Записать первые пять членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 2$ и $d = 5$;

2) $a_1 = -3$ и $d = 2$.

396. Доказать, что последовательность, заданная формулой n -го члена, является арифметической прогрессией:

1) $a_n = 3 - 4n$;

3) $a_n = 3(n + 1)$;

2) $a_n = -5 + 2n$;

4) $a_n = 2(3 - n)$.

397. В арифметической прогрессии найти:

1) a_{15} , если $a_1 = 2, d = 3$;

3) a_{18} , если $a_1 = -3, d = -2$;

2) a_{20} , если $a_1 = 3, d = 4$;

4) a_{11} , если $a_1 = -2, d = -4$.

398. Записать формулу n -го члена арифметической прогрессии:

1) 1, 6, 11, 16, ...;

3) $-4, -6, -8, -10, \dots$;

2) 25, 21, 17, 13, ...;

4) 1, $-4, -9, -14, \dots$.

399. Число -22 является членом арифметической прогрессии 44, 38, 32, Найти номер этого члена.

400. Является ли число 12 членом арифметической прогрессии 18, $-15, -12, \dots$?

401. Число -59 является членом арифметической прогрессии 1, $-5, \dots$. Найти его номер. Является ли число -46 членом этой прогрессии?

402. Найти разность арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 7, a_{16} = 67$;

2) $a_1 = -4, a_9 = 0$.

403. Разность арифметической прогрессии равна 1,5. Найти a_1 , если:

1) $a_9 = 12$;

2) $a_7 = -4$.

404. Найти первый член арифметической прогрессии, если:

1) $d = -3, a_{11} = 20$;

2) $a_{21} = -10, a_{22} = -5,5$.

405. Найти формулу n -го члена арифметической прогрессии, если:

1) $a_3 = 13, a_6 = 22$;

2) $a_2 = -7, a_7 = 18$.

406. При каких n члены арифметической прогрессии 15, 13, 11, ... отрицательны?

407. В арифметической прогрессии $a_1 = -10, d = 0,5$. При каких n выполняется неравенство $a_n < 2$?

408. Найти девятый член и разность арифметической прогрессии, если:

1) $a_8 = 126, a_{10} = 146$;

3) $a_8 = -7, a_{10} = 3$;

2) $a_8 = -64, a_{10} = -50$;

4) $a_8 = 0,5, a_{10} = -2,5$.

409. Свободно падающее тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую секунду на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние будет пройдено падающим телом за пятую секунду?

410. Курс воздушных ванн начинают с 15 мин. в первый день и увеличивают время этой процедуры в каждый следующий день на 10 мин. Сколько дней следует принимать воздушные ванны в указанном режиме, чтобы достичь их максимальной продолжительности 1 час 45 мин.?
411. Доказать, что для арифметической прогрессии справедливо равенство $a_n + a_k = a_{n-l} + a_{k+l}$. Найти $a_{10} + a_5$, если $a_7 + a_8 = 30$.
412. Доказать, что для арифметической прогрессии справедливо равенство $a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$. Найти a_{20} , если $a_{10} + a_{30} = 120$.

§ 31

СУММА n ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Задача 1. Найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 100.

△ Запишем эту сумму двумя способами:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100,$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1.$$

Сложим почленно эти равенства:

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101}_{100 \text{ слагаемых}}$$

Поэтому $2S = 101 \cdot 100$, откуда $S = 101 \cdot 50 = 5050$. ▲

Рассмотрим теперь произвольную арифметическую прогрессию

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Пусть S_n — сумма n первых членов этой прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Теорема. Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

(1)



○ Запишем S_n двумя способами:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1.$$

По определению арифметической прогрессии эти равенства можно записать так:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d), \quad (2)$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1)d). \quad (3)$$

Сложим почленно равенства (2) и (3):

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ слагаемых}}$$

Следовательно, $2S_n = (a_1 + a_n)n$, откуда $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$. ●

Задача 2. Найти сумму первых n натуральных чисел.

△ Последовательность

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n, \dots$$

является арифметической прогрессией с разностью $d = 1$. Так как $a_1 = 1$ и $a_n = n$, по формуле (1) находим:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n.$$

Итак,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \blacktriangle$$

Задача 3. Найти сумму $38 + 35 + 32 + \dots + (-7)$, если известно, что ее слагаемые являются последовательными членами арифметической прогрессии.

△ По условию $a_1 = 38$, $d = -3$, $a_n = -7$. Применяя формулу $a_n = a_1 + (n-1)d$, получаем $-7 = 38 + (n-1)(-3)$, откуда $n = 16$.

По формуле (1) находим:

$$S_{16} = \frac{38-7}{2} \cdot 16 = 248. \quad \blacktriangle$$

Задача 4*. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 1, чтобы их сумма была равна 153?

Δ Натуральный ряд чисел — арифметическая прогрессия с разностью $d=1$. По условию $a_1=1$, $S_n=153$. Формулу суммы n первых членов преобразуем так:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Используя данные, получаем уравнение с неизвестным n :

$$153 = \frac{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1}{2} \cdot n,$$

откуда

$$306 = 2n + (n-1)n, \quad n^2 + n - 306 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем:

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+1224}}{2} = \frac{-1 \pm 35}{2}, \quad n_1 = -18, \quad n_2 = 17.$$

Число слагаемых не может быть отрицательным, поэтому $n=17$. $\blacktriangle$

У п р а ж н е н и я

413. Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

- 1) $a_1=1$, $a_n=20$, $n=50$; 3) $a_1=-1$, $a_n=-40$, $n=20$;
 2) $a_1=1$, $a_n=200$, $n=100$; 4) $a_1=2$, $a_n=100$, $n=50$.

414. Найти сумму всех натуральных чисел от 2 до 98 включительно.

415. Найти сумму всех нечетных чисел от 1 до 133 включительно.

416. Найти сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, если:

- 1) $a_1=-5$, $d=0,5$; 2) $a_1=\frac{1}{2}$, $d=-3$.

417. Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии:

- 1) 9; 13; 17; ... , если $n=11$;
 2) -16; -10; -4; ... , если $n=12$.

418. Найти сумму, если ее слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии:

- 1) $3 + 6 + 9 + \dots + 273$; 2) $90 + 80 + 70 + \dots + (-60)$.

419. Найти сумму всех двузначных чисел; сумму всех трехзначных чисел.

420. Арифметическая прогрессия задана формулой n -го члена. Найти S_{50} , если:

1) $a_n = 3n + 5$; 2) $a_n = 7 + 2n$.

421. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 3, чтобы их сумма была равна 75?

422. Найти a_n и d арифметической прогрессии, у которой:

1) $a_1 = 10$, $n = 14$, $S_{14} = 1050$;

2) $a_1 = 2\frac{1}{3}$, $n = 10$, $S_{10} = 90\frac{5}{6}$.

423. Найти a_1 и d арифметической прогрессии, у которой:

1) $a_7 = 21$, $S_7 = 205$; 2) $a_{11} = 92$, $S_{11} = 22$.

424. При хранении бревен строевого леса их укладывают так, как показано на рисунке 75. Сколько бревен находится в одной кладке, если в ее основании положено 12 бревен?

425. В арифметической прогрессии $a_3 + a_9 = 8$. Найдите S_{11} .

426. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $S_5 = 65$ и $S_{10} = 230$.

427. Доказать, что для арифметической прогрессии выполняется равенство $S_{12} = 3(S_8 - S_4)$.

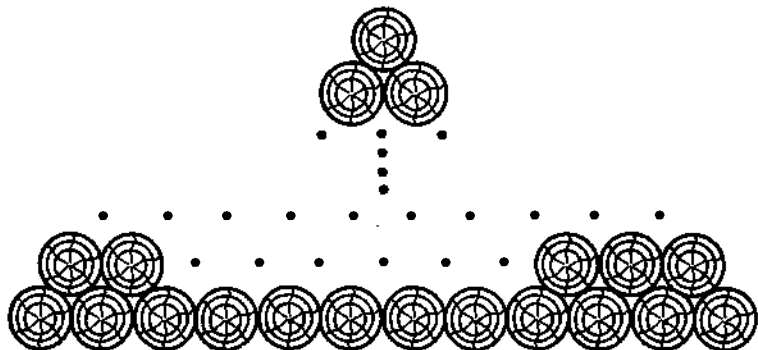


Рис. 75

Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной 4 см. Построим треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника (рис. 76). По свойству средней линии треугольника сторона второго треугольника равна 2 см. Продолжая аналогичные построения, получим треугольники со сторонами $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ см и т. д. Запишем последовательность длин сторон этих треугольников:

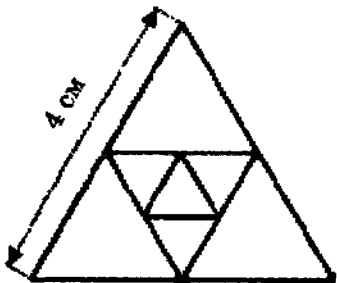


Рис. 76

$$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

В этой последовательности каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $\frac{1}{2}$. Такие последовательности называют *геометрическими прогрессиями*.



Определение. Числовая последовательность

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$$

называется *геометрической прогрессией*, если для всех натуральных n выполняется равенство

$$b_{n+1} = b_n q,$$

где $b_n \neq 0, q$ — некоторое число, не равное нулю.

Из этой формулы следует, что $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

Примеры.

1) 2, 8, 32, 128, ... — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 4$;

2) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{2}{3}$;

3) $-\frac{1}{12}, 1, -12, 144, \dots$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = -12$;

4) $7, 7, 7, 7, \dots$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 1$.

Задача 1. Доказать, что последовательность, заданная формулой $b_n = 7^{2n}$, является геометрической прогрессией.

Δ Отметим, что $b_n = 7^{2n} \neq 0$ при всех n . Требуется доказать, что частное $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ одно и то же число для всех n (не зависит от n). Получаем

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}} = \frac{7^{2n+2}}{7^{2n}} = 49,$$

т. е. частное $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ не зависит от n . $\blacktriangle$

По определению геометрической прогрессии

$$b_{n+1} = b_n q, \quad b_{n-1} = \frac{b_n}{q},$$

откуда

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \quad n > 1.$$



Если все члены геометрической прогрессии положительны, то $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$, т. е. каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов. Этим объясняется название «геометрическая» прогрессия.

Отметим, что если b_1 и q заданы, то остальные члены геометрической прогрессии можно вычислить по рекуррентной формуле $b_{n+1} = b_n q$. Однако для больших n это трудоемко. Обычно пользуются формулой n -го члена.

По определению геометрической прогрессии

$$b_2 = b_1 q; \quad b_3 = b_2 q = b_1 q^2; \quad b_4 = b_3 q = b_1 q^3 \text{ и т. д.}$$



Вообще

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

(1)

так как n -й член геометрической прогрессии получается из первого члена умножением $(n - 1)$ раз на число q .

Формулу (1) называют *формулой n -го члена геометрической прогрессии*.

Задача 2. Найти седьмой член геометрической прогрессии, если $b_1 = 81$ и $q = \frac{1}{3}$.

Δ По формуле (1) имеем:

$$b_7 = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}. \blacktriangle$$

Задача 3. Число 486 является членом геометрической прогрессии 2, 6, 18, Найти номер этого члена.

Δ Пусть n — искомый номер. Так как $b_1 = 2$, $q = 3$, то по формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$ имеем:

$$486 = 2 \cdot 3^{n-1}, \quad 243 = 3^{n-1}, \quad 3^5 = 3^{n-1},$$

откуда $n - 1 = 5$, $n = 6$. $\blacktriangle$

Задача 4. В геометрической прогрессии $b_6 = 96$ и $b_8 = 384$. Найти формулу n -члена.

Δ По формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$ имеем $b_6 = b_1 q^5$, $b_8 = b_1 q^7$. Подставив данные значения b_6 и b_8 , получим: $96 = b_1 q^5$, $384 = b_1 q^7$. Разделив второе из этих равенств на первое, получим:

$$\frac{384}{96} = \frac{b_1 q^7}{b_1 q^5},$$

откуда $4 = q^2$, или $q^2 = 4$. Из последнего равенства находим $q = 2$ или $q = -2$.

Чтобы найти первый член прогрессии, воспользуемся равенством $96 = b_1 q^5$.

1) При $q = 2$ находим:

$$96 = b_1 \cdot 2^5, \quad 96 = b_1 \cdot 32, \quad b_1 = 3.$$

Если $b_1 = 3$ и $q = 2$, то формула n -го члена имеет вид:

$$b_n = -3 \cdot 2^{n-1}.$$

2) При $q = -2$ находим:

$$96 = b_1(-2)^5, 96 = b_1(-32), b_1 = -3.$$

Если $b_1 = -3$ и $q = -2$, то формула n -го члена имеет вид:

$$b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}.$$

О т в е т : $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ или

$$b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}. \blacktriangle$$

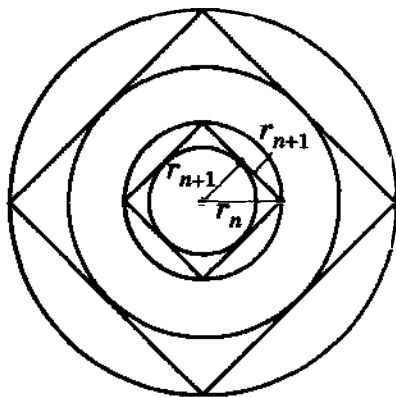


Рис. 77

Задача 5. В окружность вписан квадрат, а в него вписана вторая окружность. Во вторую окружность вписан второй квадрат, а в него — третья окружность и т. д. (рис. 77). Доказать, что радиусы окружностей образуют геометрическую прогрессию.

Δ Пусть r_n — радиус n -ой окружности. Тогда по теореме Пифагора

$$r_{n+1}^2 + r_{n+1}^2 = r_n^2,$$

откуда

$$r_{n+1}^2 = \frac{1}{2} r_n^2, \text{ т. е. } r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n.$$

Значит, последовательность радиусов окружностей образует геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\blacktriangle$

У п р а ж н е н и я

428. (Устно.) Назвать первый член и знаменатель геометрической прогрессии:

1) $8, 16, 32, \dots$;

3) $4, 2, 1, \dots$;

2) $-10, 20, -40, \dots$;

4) $-50, 10, -2, \dots$.

429. Записать первые пять членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 12, q = 2$;

2) $b_1 = -3, q = -4$.

430. Доказать, что последовательность, заданная формулой n -го члена, является геометрической прогрессией:

1) $b_n = 3 \cdot 2^n$; 2) $b_n = 5^{n+3}$; 3) $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$; 4) $b_n = \frac{1}{5^{n-1}}$.

431. Для геометрической прогрессии вычислить:

1) b_4 , если $b_1 = 3$ и $q = 10$;

2) b_7 , если $b_1 = 4$ и $q = \frac{1}{2}$;

3) b_5 , если $b_1 = 1$ и $q = -2$;

3) b_6 , если $b_1 = -3$ и $q = -\frac{1}{3}$.

432. Записать формулу n -го члена геометрической прогрессии:

1) 4, 12, 36, ...;

3) 4, $-\frac{1}{4}$, ...;

2) 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...;

4) 3, -4 , $\frac{16}{3}$,

433. Найти номер подчеркнутого члена геометрической прогрессии:

1) 6, 12, 24, ... , 192, ...;

3) 625, 125, 25, ... , $\frac{1}{25}$;

2) 4, 12, 36, ... , 324, ...;

4) -1 , 2, -4 , ... , 128,

434. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 2$, $b_5 = 162$;

3) $b_1 = -128$, $b_7 = -2$;

2) $b_1 = 3$, $b_4 = 81$;

4) $b_1 = 250$, $b_4 = -2$.

435. Дана геометрическая прогрессия 2, 6, 18, ... :

1) вычислить восьмой член этой прогрессии;

2) найти номер члена последовательности, равного 162.

436. Найти седьмой член и знаменатель геометрической прогрессии с положительными членами, если:

1) $b_8 = \frac{1}{9}$, $b_6 = 81$;

2) $b_6 = 9$, $b_8 = 3$.

437. Найти пятый и первый члены геометрической прогрессии, если:

1) $b_4 = 5$, $b_6 = 20$;

2) $b_4 = 9$, $b_6 = 4$.

438. Вкладчик 2 января 2005 г. внес в сберегательный банк 30 000 сумов. Какой станет сумма его вклада на 2 января 2008, если сбербанк начисляет ежегодно 5 % от суммы вклада?
439. Дан квадрат со стороной 4 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата. Середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и т. д. Доказать, что последовательность площадей этих квадратов является геометрической прогрессией. Найти площадь седьмого квадрата.

§ 33

СУММА n ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Задача 1. Найти сумму:

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5. \quad (1)$$

△ Умножим обе части равенства на 3:

$$3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6. \quad (2)$$

Перепишем равенства (1) и (2) так:

$$S = 1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5).$$

$$3S = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 3^6.$$

Выражения, стоящие в скобках, одинаковы. Поэтому, вычитая из нижнего равенства верхнее, получаем:

$$3S - S = 3^6 - 1, \quad 2S = 3^6 - 1,$$

$$S = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{729 - 1}{2} = 364. \quad \blacktriangle$$

Рассмотрим теперь произвольную геометрическую прогрессию $b_1, b_1q, \dots, b_1q^n, \dots$, знаменатель которой $q \neq 1$.

Пусть S_n — сумма n первых членов этой прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1}. \quad (3)$$



Теорема. Сумма n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ равна:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}. \quad (4)$$

○ Умножим обе части равенства (3) на q :

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^n. \quad (5)$$

Перепишем равенства (3) и (5), выделив в них одинаковые слагаемые:

$$\begin{aligned} S_n &= b_1 + (b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1}), \\ qS_n &= (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1}) + b_1q^n. \end{aligned}$$

Выражения, стоящие в скобках, равны. Поэтому, вычитая из верхнего равенства нижнее, получаем:

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n.$$

Отсюда

$$S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n), \quad S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Заметим, что если $q = 1$, то

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \dots + b_1}_{n \text{ слагаемых}} = b_1n, \quad \text{т. е. } S_n = b_1n.$$

Задача 2. Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии $6, 2, \frac{2}{3}, \dots$.

△ В этой прогрессии $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. По формуле (4) находим:

$$S_5 = \frac{6 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{6 \cdot \left(1 - \frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6 \cdot 242 \cdot 3}{2 \cdot 243} = \frac{242}{27}. \blacktriangle$$

Задача 3. В геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$ сумма первых шести членов равна 252. Найти первый член этой прогрессии.

△ Воспользуемся формулой (4): $252 = \frac{b_1 \left(1 - \frac{1}{2^6}\right)}{1 - \frac{1}{2}}$. Отсюда

$$252 = 2b_1 \left(1 - \frac{1}{64}\right), \quad 252 = \frac{b_1 \cdot 63}{32}, \quad b_1 = 128. \blacktriangle$$

Задача 4. Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна -93 . Первый член этой прогрессии равен -3 , а знаменатель q равен 2 . Найти n .

△ Используя формулу (4), получаем:

$$-93 = \frac{-3(1-2^n)}{1-2}.$$

Отсюда $-31 = 1 - 2^n$, $2^n = 32$, $2^n = 2^5$, $n = 5$. ▲

Задача 5. Последовательность $5, 15, 45, \dots, 1215, \dots$ — геометрическая прогрессия. Найти сумму $5 + 15 + \dots + 1215$.

△ В этой прогрессии $b_1 = 5$, $q = 3$, $b_n = 1215$. Формулу суммы n первых членов преобразуем так:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1-b_1q^{n-1}q}{1-q} = \frac{b_1-b_nq}{1-q} = \frac{b_nq-b_1}{q-1}.$$

Используя условие задачи, находим:

$$S_n = \frac{1215 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = \frac{3645 - 5}{2} = 1820. \quad \blacktriangle$$

У п р а ж н е н и я

440. Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 2$, $n = 6$;

4) $b_1 = -5$, $q = -\frac{2}{3}$, $n = 5$;

2) $b_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$;

5) $b_1 = 6$, $q = 1$, $n = 200$;

3) $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 4$;

6) $b_1 = -4$, $q = 1$, $n = 100$.

441. Найти сумму семи первых членов геометрической прогрессии:

1) $5, 10, 20, \dots$;

2) $2, 6, 18, \dots$.

442. В геометрической прогрессии найти:

1) b_1 и b_7 , если $q = 2$, $S_7 = 635$;

2) b_1 и b_8 , если $b_2 = -2$, $S_8 = 85$.

443. В геометрической прогрессии найти число n членов, если:

- 1) $S_n = 189$, $b_1 = 3$, $q = 2$;
- 2) $S_n = 635$, $b_1 = 5$, $q = 2$;
- 3) $S_n = 170$, $b_1 = 256$, $q = -\frac{1}{2}$;
- 4) $S_n = -99$, $b_1 = -9$, $q = -2$.

444. В геометрической прогрессии найти:

- 1) n и b_n , если $b_1 = 7$, $q = 3$, $S_n = 847$;
- 2) n и b_n , если $b_1 = 8$, $q = 2$, $S_n = 4088$;
- 3) n и q , если $b_1 = 2$, $b_n = 1458$, $S_n = 2186$;
- 4) n и q , если $b_1 = 1$, $b_n = 2401$, $S_n = 2801$.

445. Найти сумму чисел, если ее слагаемые являются последовательными членами геометрической прогрессии:

- 1) $1 + 2 + 4 + \dots + 128$;
- 2) $1 + 3 + 9 + \dots + 243$;
- 3) $-1 + 2 - 4 + \dots + 128$;
- 4) $5 - 15 + 45 - \dots + 405$.

446. В геометрической прогрессии найти b_5 и S_4 , если:

- 1) $b_2 = 15$, $b_3 = 25$;
- 2) $b_2 = 14$, $b_4 = 686$, $q > 0$.

447. Геометрическая прогрессия задана формулой n -го члена:

- 1) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, найти S_5 ;
- 2) $b_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n$, найти S_6 .

448. Доказать тождество:

$$(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) = x^n - 1,$$

где n — натуральное число, большее 1.

449. В геометрической прогрессии найти:

- 1) b_1 и q , если $b_3 = 135$, $S_3 = 195$;
- 2) b_3 и q , если $b_1 = 12$, $S_3 = 372$.

450. В геометрической прогрессии найти:

- 1) q , если $b_1 = 1$ и $b_3 + b_5 = 90$;

- 2) q , если $b_2 = 3$ и $b_4 + b_6 = 60$;
 3) S_{10} , если $b_1 - b_3 = 15$ и $b_2 - b_4 = 30$;
 4) S_5 , если $b_3 - b_1 = 24$ и $b_5 - b_1 = 624$.

§ 34

БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Рассмотрим квадраты, изображенные на рисунке 78. Сторона первого квадрата равна 1, сторона второго равна $\frac{1}{2}$, сторона третьего — $\frac{1}{2^2}$ и т. д. Таким образом, стороны квадрата образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots \quad (1)$$

Площади этих квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \dots, \frac{1}{4^{n-1}}, \dots \quad (2)$$

Из рисунка 78 видно, что стороны квадратов и их площади с возрастанием номера n становятся все меньше, приближаясь к нулю. Поэтому прогрессии (1) и (2) называются бесконечно убывающими. Отметим, что у рассматриваемых прогрессий знаменатели меньше единицы.

Рассмотрим теперь геометрическую прогрессию:

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, \dots \quad (3)$$

Знаменатель этой прогрессии $q = -\frac{1}{3}$, а ее члены $b_1 = 1, b_2 = -\frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{9}, b_4 = -\frac{1}{27}$ и т. д.

С возрастанием номера n члены этой прогрессии приближаются к нулю. Прогрессию (3) также называют бесконечно убывающей. Отметим, что модуль ее знаменателя меньше единицы: $|q| < 1$.

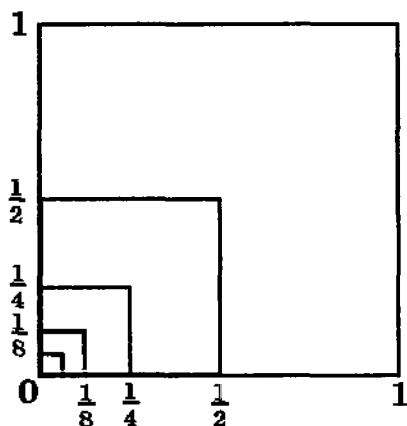


Рис. 78



Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, если модуль ее знаменателя меньше единицы.

Задача 1. Доказать, что геометрическая прогрессия, заданная формулой n -го члена $b_n = \frac{3}{5^n}$, является бесконечно убывающей.

△ По условию $b_1 = \frac{3}{5}$, $b_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$, откуда $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$. Так как $|q| < 1$, то данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей. ▲

На рисунке 79 изображен квадрат со стороной 1. Отметим штриховкой его половину, затем половину оставшейся части и т. д. Площади заштрихованных прямоугольников образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

Если заштриховать все получающиеся таким образом прямоугольники, то штриховкой покроется весь квадрат. Естественно считать, что сумма площадей всех заштрихованных прямоугольников равна 1, т. е.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1.$$

В левой части этого равенства стоит сумма бесконечного числа слагаемых. Рассмотрим сумму первых n слагаемых:

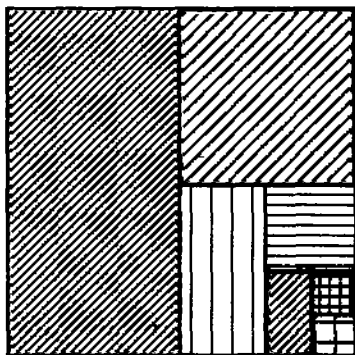


Рис. 79

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии имеем:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Если n неограниченно возрастает, то $\frac{1}{2^n}$ как угодно близко приближается к нулю (стремится к нулю).

В этом случае пишут:

$$\frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

(читается: « $\frac{1}{2^n}$ стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности»), или $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ (читается: «предел последовательности $\frac{1}{2^n}$ при n , стремящемся к бесконечности равен 0»).

Вообще, если для последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, (сокращенно обозначают $\{a_n\}$) существует число a такое, что при $n \rightarrow \infty$ модуль разности $|a_n - a| \rightarrow 0$, то говорят, что число a является пределом последовательности $\{a_n\}$ и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Так как $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. $S_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому бесконечную сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ считают равной 1.

Рассмотрим теперь любую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию:

$$b_1, b_1q, b_1q^2, \dots, b_1q^{n-1}, \dots, \text{ где } |q| < 1.$$

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называют число, к которому стремится сумма ее первых n членов при $n \rightarrow \infty$.

Воспользуемся формулой $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Перепишем ее так:

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} q^n. \quad (4)$$

Так как $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$, если n неограниченно возрастает. Поэтому $\frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. В формуле (4) первое слагаемое не зависит от n . Следовательно, S_n стремится к числу $\frac{b_1}{1-q}$ при $n \rightarrow \infty$.



Таким образом, сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \quad (5)$$

В частности, при $b_1 = 1$ получаем $S = \frac{1}{1-q}$. Это равенство обычно записывают так:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Подчеркнем, что равенство (5) и это равенство справедливы только при $|q| < 1$.

Задача 2. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \dots$.

Δ Так как $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = -\frac{1}{6}$, то $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}$, и по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получим: $S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3}{8}$. $\blacktriangle$

Задача 3. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_3 = -1$, $q = \frac{1}{7}$.

Δ Применяя формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$ при $n=3$, получаем $-1 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3-1}$, $-1 = b_1 \cdot \frac{1}{49}$, откуда $b_1 = -49$.

По формуле (5) находим сумму S :

$$S = \frac{-49}{1 - \frac{1}{7}} = -57 \frac{1}{6}. \quad \blacktriangle$$

Задача 4. Пользуясь формулой (5), записать бесконечную периодическую дробь $a = 0,(15) = 0,151515\dots$ в виде обыкновенной дроби.

Δ Составим следующую последовательность приближенных значений данной бесконечной дроби:

$$a_1 = 0,15 = \frac{15}{100}; \quad a_2 = 0,1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2},$$

$$a_3 = 0,151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3}.$$

Запись приближений показывает, что данную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$a = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \dots$$

По формуле (5) получим: $a = \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33} \cdot \blacktriangle$

У п р а ж н е н и я

451. Доказать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots;$

3) $-81, -27, -9, \dots;$

2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots;$

4) $-16, -8, -4, \dots$

452. Выяснить, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей, если:

1) $b_1 = 40, b_2 = -20;$

3) $b_7 = -30, b_6 = 15;$

2) $b_7 = 12, b_{11} = \frac{3}{4};$

4) $b_5 = -9, b_9 = -\frac{1}{27}.$

453. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots;$

3) $-25, -5, -1, \dots;$

2) $6, 1, \frac{1}{6}, \dots;$

4) $-7, -1, -\frac{1}{7}, \dots$

454. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{8};$

3) $q = \frac{1}{3}, b_5 = \frac{1}{81};$

2) $q = -\frac{1}{3}, b_1 = 9;$

4) $q = -\frac{1}{2}, b_4 = -\frac{1}{8}.$

455. Является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она задана формулой n -го члена:

1) $b_n = 3 \cdot (-2)^n$;

3) $b_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;

2) $b_n = -3 \cdot 4^n$;

4) $b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$?

456. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $12, 4, \frac{4}{3}, \dots$;

2) $100, -10, 1, \dots$.

457. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q = \frac{1}{2}, b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$;

2) $q = \frac{\sqrt{3}}{2}, b_4 = \frac{9}{8}$.

458. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150. Найти:

1) b_1 , если $q = \frac{1}{3}$; 2) q , если $b_1 = 75$.

459. На куб со стороной a поставили куб со стороной $\frac{a}{2}$, на него куб со стороной $\frac{a}{4}$, затем куб со стороной $\frac{a}{8}$ и т. д. (рис. 80). Найти высоту получившейся фигуры.

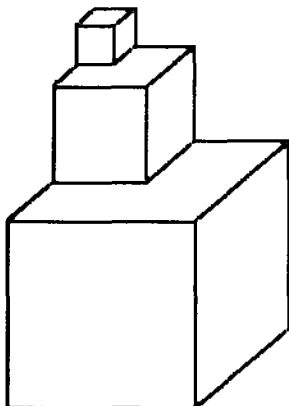


Рис. 80

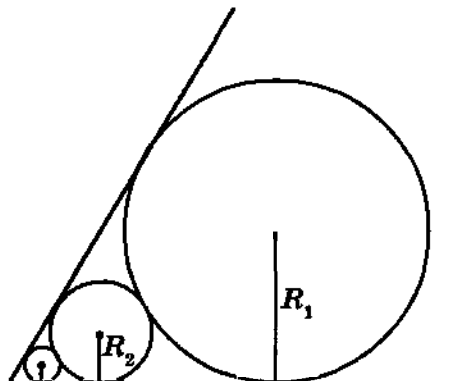


Рис. 81

460. В угол, равный 60° , последовательно вписаны окружности, касающиеся друг друга (рис. 81). Радиус первой окружности равен R_1 . Найти радиусы остальных окружностей $R_2, R_3, \dots, R_n, \dots$ и показать, что они образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Доказать, что сумма $R_1 + 2(R_2 + R_3 + \dots + R_n + \dots)$ равна расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.

461. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

- 1) $0,(5)$; 2) $0,(9)$; 3) $0,(12)$; 4) $0,2(3)$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

462. Найти разность арифметической прогрессии и записать ее четвертый и пятый члены:

1) $4, 4\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}, \dots$;

3) $1, 1 + \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3}, \dots$;

2) $3\frac{1}{2}, 3, 2\frac{1}{2}, \dots$;

4) $\sqrt{2}, \sqrt{2} - 3, \sqrt{2} - 6, \dots$.

463. Доказать, что последовательность, заданная формулой n -го члена $a_n = -2(1 - n)$, является арифметической прогрессией.

464. В арифметической прогрессии вычислить:

1) a_5 , если $a_1 = 6, d = \frac{1}{2}$;

2) a_7 , если $a_1 = -3\frac{1}{3}, d = -\frac{1}{3}$.

465. Найти сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -1, a_2 = 1$;

2) $a_1 = 3, a_2 = -3$.

466. Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -2, a_n = -60, n = 10$;

2) $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = 25\frac{1}{2}, n = 11$.

467. Найти сумму, если ее слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии:

1) $-38 + (-33) + (-28) + \dots + 12$; 2) $-17 + (-14) + (-11) + \dots + 13$.

468. Найти знаменатель геометрической прогрессии и записать ее четвертый и пятый члены:

1) $3, 1, \frac{1}{3}, \dots$;

3) $3, \sqrt{3}, 1, \dots$;

2) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$;

4) $5, -5\sqrt{2}, 10, \dots$.

469. Записать формулу n -го члена геометрической прогрессии:

1) $-2, 4, -8, \dots$;

2) $-\frac{1}{4}, 1, -2, \dots$.

470. В геометрической прогрессии найти b_n , если :

1) $b_1 = 2, q = 2, n = 6$;

2) $b_1 = \frac{1}{8}, q = 5, n = 4$.

471. Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = \frac{1}{2}, q = -4, n = 5$;

3) $b_1 = 10, q = 1, n = 6$;

2) $b_1 = 2, q = -\frac{1}{2}, n = 10$;

4) $b_1 = 5, q = -1, n = 9$.

472. Найти сумму n членов геометрической прогрессии:

1) $128, 64, 31, \dots, n = 6$;

3) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \dots, n = 5$;

2) $162, 54, 18, \dots, n = 5$;

4) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, n = 4$.

473. Доказать, что данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, и найти ее сумму:

1) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$;

2) $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \dots$.

474. Найти разность арифметической прогрессии, если $a_1 = 2\frac{1}{2}$ и $a_8 = 23\frac{1}{2}$.

475. Записать первые пять членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 5, a_3 = 15$;

2) $a_3 = 8, a_5 = 2$.

476. Между числами -10 и 5 вставить число так, чтобы получились 3 последовательных члена арифметической прогрессии.

Проверьте себя!

1. В арифметической прогрессии $a_1 = 2$, $d = -3$. Найти a_{10} и сумму первых десяти ее членов.
2. В геометрической прогрессии $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$. Найти b_6 и сумму первых шести ее членов.
3. Доказать, что последовательность $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, и найти сумму ее членов.

477. Найти девятнадцатый и первый члены арифметической прогрессии, если:

1) $a_{18} = 28$, $a_{20} = 38$;

2) $a_{18} = -6$, $a_{20} = 6$.

478. При каком значении x являются последовательными членами геометрической прогрессии числа:

1) $3x, \frac{x+2}{2}, 2x-1$;

2) $3x^2, 2, 11x$?

479. Показать, что следующие числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии:

1) $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin \alpha \cos \beta$, $\sin(\alpha - \beta)$; 3) $\cos 2\alpha$, $\cos^2 \alpha$, 1;

2) $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos \alpha \cos \beta$, $\cos(\alpha - \beta)$; 4) $\sin 5\alpha$, $\sin 3\alpha \cos 2\alpha$, $\sin \alpha$.

480. Сколько нужно взять последовательных нечетных натуральных чисел, начиная с 5, чтобы их сумма была равна 252?

481. Найти a_n и d арифметической прогрессии, у которой:

1) $a_1 = 40$, $n = 20$, $S_{20} = -40$;

2) $a_1 = \frac{1}{3}$, $n = 16$, $S_{16} = -10\frac{2}{3}$.

482. Для геометрической прогрессии вычислить:

1) b_9 , если $b_1 = 4$ и $q = -1$;

2) b_7 , если $b_1 = 1$ и $q = \sqrt{3}$.

483. Найти пятый член геометрической прогрессии, если:

1) $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_7 = 16$;

3) $b_2 = 4$, $b_4 = 1$;

2) $b_3 = -3$, $b_6 = -81$;

4) $b_4 = -\frac{1}{5}$, $b_6 = -\frac{1}{125}$.

484. Между числами 4 и 9 вставить положительное число так, чтобы получилось 3 последовательных члена геометрической прогрессии.
485. Является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если:
- 1) $b_n = 5^{n+1}$; 2) $b_n = (-4)^{n+2}$; 3) $b_n = \frac{10}{7^n}$; 4) $b_n = -\frac{50}{3^{n+3}}$?
486. Показать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, если:
- 1) $b_2 = -81, S_2 = 162$; 3) $b_1 + b_3 = 130, b_1 - b_3 = 120$;
 2) $b_2 = 33, S_2 = 67$; 4) $b_2 + b_4 = 68, b_2 - b_4 = 60$.
487. Отдыхающий, следуя совету врача, загорал в первый день 5 мин., а в каждый последующий день увеличивал время пребывания на солнце на 5 мин. В какой день недели время его пребывания на солнце будет равно 40 мин., если он начал загорать в среду?
488. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ и $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$.
489. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$.
490. Часы бьют 1 раз, когда показывают половину очередного часа, и каждый час столько раз, каково время от 1 до 12. Сколько раз часы пробьют за сутки?

? ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ VI

1. В арифметической прогрессии $a_1 = 3, d = -2$. Найти S_{101} .
 А) -9797; В) -9798; С) -7979; D) -2009; Е) -9697.
2. В арифметической прогрессии $d = 4, S_{50} = 5000$. Найти a_1 .
 А) -2; В) 2; С) 100; D) 1250; Е) 5.
3. В арифметической прогрессии $a_1 = 1, S_{101} = 151$. Найти d .
 А) 4; В) 2; С) 3; D) 3,5; Е) 5.

4. В арифметической прогрессии $a_2 + a_9 = 20$. Найти S_{10} .
А) 90; В) 110; С) 200; D) 100; Е) определить нельзя.
5. Найти 6-й член последовательности натуральных чисел, дающих при делении на 8 остаток 7.
А) 74; В) 55; С) 39; D) 63; Е) 47.
6. Найти номер члена прогрессии 1, 8, 15, 22, ..., равного 701.
А) 101; В) 100; С) 102; D) 99; Е) не является членом прогрессии.
7. Найти номер, начиная с которого члены прогрессии 1002, 999, 996, ...будут отрицательными числами.
А) 335; В) 336; С) 337; D) 334; Е) 330.
8. В арифметической прогрессии $a_2 + a_6 = 44$, $a_5 - a_1 = 20$. Найти a_{100} .
А) 507; В) 495; С) 502; D) 595; Е) 520.
9. В арифметической прогрессии $a_1 = 7$, $d = 5$, $S_n = 25450$. Найти n .
А) 99; В) 101; С) 10; D) 100; Е) 590.
10. В арифметической прогрессии $a_{12} + a_{15} = 20$. Найти S_{26} .
А) 540; В) 270; С) 520; D) 130; Е) 260.
11. Поместить между числами 1 и 11 таких 99 чисел, которые вместе с данными образуют арифметическую прогрессию. Найти для этой прогрессии S_{50} .
А) $172\frac{1}{2}$; В) 495; С) 300; D) 178; Е) 345.
12. Найти номер, начиная с которого члены прогрессии с $a_1 = -20,7$, $d = 1,8$ будут положительными числами.
А) 18; В) 13; С) 12; D) 15; Е) 17.
13. В последовательности чисел, кратных 7, найти номер члена, равного 385.
А) 12; В) 11; С) 10; D) 55; Е) 56.
14. В геометрической прогрессии $b_1 = 2$, $q = 3$. Найти S_6 .
А) 1458; В) 729; С) 364; D) 728; Е) правильный ответ не приведен.

15. В геометрической прогрессии $q = \frac{1}{3}$, $S = 360$. Найти b_1 .
 А) $63\frac{2}{3}$; В) 81; С) $121\frac{1}{3}$; D) 243; Е) 240.
16. В геометрической прогрессии $S_4 = 10\frac{5}{8}$, $S_5 = 42\frac{5}{8}$. Найти q .
 А) 4; В) 2; С) 8; D) $\frac{1}{2}$; Е) $\sqrt{2}$.
17. В геометрической прогрессии 6 членов. Сумма первых трех равна членов 26. Сумма следующих 3 членов — 702. Найти знаменатель прогрессии.
 А) 4; В) 3; С) $\frac{1}{3}$; D) $2\sqrt{3}$; Е) $\frac{4}{3}$.
18. В бесконечной убывающей геометрической прогрессии $b_1 = 1$, $S = 64$. Найти q .
 А) $\frac{1}{2}$; В) $\frac{64}{65}$; С) $\frac{63}{64}$; D) $\frac{1}{4}$; Е) $\frac{1}{8}$.
19. В геометрической прогрессии $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_1 = 2 - \sqrt{3}$. Найти S .
 А) $2 + \sqrt{3}$; В) 3; С) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; D) 2; Е) $\sqrt{3}$.



Исторические задачи

1. *Задача Беруни.* Доказать, что в геометрической прогрессии с положительными членами: $b_{k+1}^2 = b_1 \cdot b_{2k+1}$, если число членов нечетно; $b_k \cdot b_{k+1} = b_1 \cdot b_{2k}$, если число членов четно.
2. *Задача из папируса Ахмеса (2000 лет до н. э.).* Распределить 10 мер зерна между 10 крестьянами так, чтобы каждый следующий получал зерна на $\frac{1}{8}$ больше, чем предыдущий.



Исторические сведения

В своей книге «Памятники минувших поколений» Абу Райхан Беруни в задаче об изобретении шахмат вычисляет сумму первых 64 членов прогрессии с $b_1 = 1$ и знаменателем $q = 2$. Он показывает, что если вычесть из числа, соответствующего k -клетке доски число 1, разность будет равна сумме чисел, соответствующих всем клеткам, предшествующим k -й, т. е. доказывает, что $q^k - 1 = 1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ 9 КЛАССА

491. Построить график функции:

- 1) $y = x^2 + 6x + 9$; 4) $y = x^2 + 3x - 1$; 7) $y = (x - 2)(x + 5)$;
 2) $y = x^2 - \frac{7}{2}$; 5) $y = x^2 + x$; 8) $y = \left(x + \frac{1}{8}\right)(x + 4)$.
 3) $y = x^2 - 12x + 4$; 6) $y = x^2 - x$;

492. (Устно.) Используя график функции $y = ax^2 + bx + c$, установить ее свойства (рис. 82).

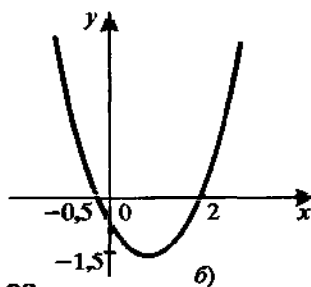
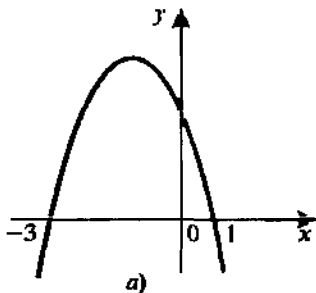


Рис. 82.

493. Построить график функции и установить ее свойства:

- 1) $y = -2x^2 - 8x - 8$; 4) $y = 3 + 2x - x^2$;
 2) $y = 3x^2 + 12x + 16$; 5) $y = -4x^2 - 4x$;
 3) $y = 2x^2 - 12x + 19$; 6) $y = 12x - 4x^2 - 9$.

494. На одной координатной плоскости построить график функции:

- 1) $y = \frac{1}{3}x^2$ и $y = -\frac{1}{3}x^2$; 3) $y = -\frac{1}{2}x^2$ и $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2$;
 2) $y = 3x^2$ и $y = 3x^2 - 2$; 4) $y = 2x^2$ и $y = 2(x - 5)^2 + 3$.

Решить неравенство (495–499).

- 495.** 1) $(x - 5)(x + 3) > 0$; 3) $(x - 7)(x + 11) \leq 0$;
 2) $(x + 15)(x + 4) < 0$; 4) $(x - 12)(x - 13) \geq 0$.

496. 1) $x^2 + 3x > 0$;

2) $x^2 - x\sqrt{5} < 0$;

497. 1) $x^2 - 8x + 7 > 0$;

2) $x^2 + 3x - 54 < 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2 + 0,5x - 1 > 0$;

498. 1) $x^2 - 6x + 9 > 0$;

2) $x^2 + 24x + 144 \leq 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 < 0$;

499. 1) $x^2 - 10x + 30 < 0$;

2) $-x^2 + x - 1 < 0$;

3) $x^2 + 4x + 5 < 0$;

3) $x^2 - 16 \leq 0$;

4) $x^2 - 3 > 0$.

4) $5x^2 + 9,5x - 1 < 0$;

5) $-x^2 - 3x + 4 > 0$;

6) $-8x^2 + 17x - 2 \leq 0$.

4) $\frac{1}{3}x^2 + 4x + 12 \geq 0$;

5) $4x^2 - 4x + 1 > 0$;

6) $5x^2 + 2x + \frac{1}{5} < 0$.

4) $2x^2 - 4x + 13 > 0$;

5) $4x^2 - 9x + 7 < 0$;

6) $-11 + 8x - 2x^2 < 0$.

Решить методом интервалов неравенство (500–502):

500. 1) $(x + 3)(x - 4) > 0$;

2) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 0,7) < 0$;

3) $(x - 2,3)(x + 3,7) < 0$;

4) $(x + 2)(x - 1) \leq 0$;

501. 1) $(x + 2)(x - 1) \geq 0$;

2) $(x + 2)(x - 1)^2 \leq 0$;

3) $(x + 2)(x - 1)^2 > 0$;

4) $(2 - x)(x + 3x^2) \geq 0$.

502. 1) $\frac{3-x}{2+x} \geq 0$;

2) $\frac{0,5+x}{x-2} \leq 0$;

3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x} < 0$;

4) $\frac{2x}{(3+x)(1-x)} < 0$.

503. Площадь трапеции больше $19,22 \text{ см}^2$. Ее средняя линия в два раза больше высоты. Найти среднюю линию и высоту трапеции.

504. С самолета, находящегося на высоте, большей 320 м , геологам был сброшен груз. За какое время груз долетит до земли? Ускорение свободного падения $\approx 10 \text{ м/с}^2$.

505. Сторона параллелограмма на 2 см больше высоты, опущенной на эту сторону. Найти длину этой стороны, если площадь параллелограмма больше 15 см^2 .

506. Решить методом интервалов неравенство:

1) $(x+2)(x+5)(x-1)(x+4) > 0$;

2) $(x+1)(3x^2+2)(x-2)(x+7) < 0$;

3) $\frac{3x-1}{3x+1} + \frac{x-3}{x+3} \geq 2$;

4) $\frac{1-3x}{1+3x} + \frac{1+3x}{3x-1} \geq \frac{12}{1-9x^2}$.

507. Найти коэффициенты p и q квадратного трехчлена $x^2 + px + q$, если этот трехчлен при $x = 0$ принимает значение, равное -14 , а при $x = -2$ принимает значение -20 .

508. Найти $p - q$, если парабола $y = x^2 + px + q$:

1) пересекает ось абсцисс в точках $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{2}{3}$;

2) касается оси абсцисс в точке $x = -7$;

3) пересекает ось абсцисс в точке $x = 2$ и ось ординат в точке $y = -1$.

509. Записать уравнение параболы, если известно, что она пересекает ось абсцисс в точке $x = 5$, а ее вершиной является точка

$$\left(2\frac{3}{4}; 10\frac{1}{8}\right).$$

510. Зеркало отражателя телескопа (рефлектора) имеет в осевом сечении вид параболы (рис. 83). Написать уравнение этой параболы.

511. Найти коэффициенты квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если ее график проходит через точки:

1) $A(-1; 0)$, $B(3; 0)$ и $C(0; -6)$;

2) $K(-2; 0)$, $L(1; 0)$, $M(0; 2)$.

512. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство:

1) $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$;

3) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$;

2) $a^3 + b^3 \leq (a+b)^3$;

4) $(a+b)^3 \leq 4(a^3 + b^3)$.

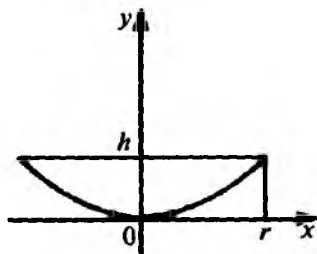


Рис. 83

513. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство:

$$1) \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3;$$

$$2) \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c;$$

$$3) \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a + b + c}{3};$$

$$4) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

514. Построить график функции:

$$1) y = \sqrt{x^2};$$

$$2) y = |x - 1|;$$

$$3) y = \sqrt{x^2 - 6x + 9};$$

$$4) y = \sqrt{x^2 + 4x + 4};$$

$$5) y = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2};$$

$$6) y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x + 2|.$$

515. Найти действительные корни уравнения:

$$1) x^2 - |x| - 2 = 0;$$

$$3) |x^2 - x| = 2;$$

$$5) |x^2 - 2| = 2;$$

$$2) x^2 - 4|x| + 3 = 0;$$

$$4) |x^2 + x| = 1;$$

$$6) |x^2 - 26| = 10.$$

516. Извлечь корень:

$$1) \sqrt[3]{7\frac{19}{32}};$$

$$2) \sqrt{5\frac{4}{9}};$$

$$3) \sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}, a \neq 0;$$

$$4) \sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}, y > 0.$$

517. Упростить выражение:

$$1) (3\sqrt{20} + 7\sqrt{15} - \sqrt{5}) : \sqrt{5};$$

$$3) 2\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$2) (\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{56}) : \sqrt[3]{7};$$

$$4) 7\sqrt{1\frac{3}{4}} - \sqrt{7} + 0,5\sqrt{343}.$$

518. Сравнить значения выражений:

$$1) \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3} \text{ и } \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2};$$

$$2) (2\sqrt{0,5})^{0,3} \text{ и } (2\sqrt{0,5})^{0,37}.$$

519. Упростить выражение:

$$1) \frac{\sqrt[6]{a^3\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}};$$

$$2) \frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{8}}};$$

$$3) (16a^{-4})^{-\frac{3}{4}};$$

$$4) (27b^{-6})^{\frac{2}{3}}.$$

520. Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{9a^2b}$, где $a < 0, b > 0$; 3) $\sqrt{8a^3b^5}$, где $a < 0, b < 0$;

2) $\sqrt{25a^2b^3}$, где $a > 0, b > 0$; 4) $\sqrt{121a^3b^3}$, где $a < 0, b < 0$.

521. Внести множитель под знак корня:

1) $x\sqrt{5}$, где $x \geq 0$; 3) $-a\sqrt{3}$, где $a \geq 0$;

2) $x\sqrt{3}$, где $x < 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, где $a < 0$.

522. Вычислить:

1) $\sqrt[3]{1000} \cdot (0,0001)^{0,25} + (0,027)^{\frac{1}{3}} \cdot 7,1^0 - \left(\frac{10}{13}\right)^{-1}$;

2) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} : \frac{1}{\sqrt{11\frac{1}{9}}} + (6,25)^{\frac{1}{2}} : (-4)^{-\frac{1}{2}}$.

523. Найти значение выражения:

1) $\left(\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} - \frac{\frac{1}{a^2} \frac{1}{b^2}}{a - b} \right) \cdot \frac{a - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a}$, при $a = 3, b = 12$;

2) $\frac{m+2\sqrt{mn}+n}{n} \cdot \frac{\sqrt{mn}+n}{m-n} - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$, при $m = 5, n = 20$.

524. Решить уравнение:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 2$; 2) $x^{\frac{1}{2}} = 3$; 3) $x^{-3} = 8$; 4) $x^{\frac{5}{2}} = 0$.

525. Выяснить, принадлежит ли графику функции $y = -\frac{25}{x}$ точка:

1) $A(\sqrt{5}; -5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$.

526. Выяснить, принадлежит ли графику функции $y = \sqrt{1-2x}$ точка:

1) $C\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $D\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

527. Найти область определения функции:

$$1) y = \sqrt{-x^2 - 3x + 10}; \quad 3) y = \sqrt[3]{\frac{x+4}{6-x}}; \quad 5) y = \sqrt[5]{\frac{x}{0,5x+1}};$$

$$2) y = \sqrt[4]{\frac{x-7}{3-2x}}; \quad 4) y = \sqrt[6]{\frac{2x+15}{6}}; \quad 6) y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}.$$

528. Построить график функции:

$$1) y = x^2 + 6x + 10; \quad 3) y = \frac{4}{x}; \quad 5) y = \frac{x^8}{2};$$
$$2) y = -x^2 - 7x - 6; \quad 4) y = -\frac{6}{x}; \quad 6) y = \frac{1}{4}x^4.$$

Выяснить по графику: промежутки возрастания и убывания функции; является ли функция четной или нечетной.

529. Указать несколько углов поворота, при котором точка $P(1; 0)$ перемещается в точку:

$$1) A(0; 1); \quad 2) B(0; -1); \quad 3) C(-1; 0); \quad 4) D(1; 0).$$

530. Вычислить
$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{4}}.$$

531. Выяснить, положительно или отрицательно число:

$$1) \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6}; \quad 2) \sin\alpha\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

532. Дано: $\sin\alpha = 0,6$, $\sin\beta = -0,28$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Вычислить: 1) $\cos(\alpha - \beta)$; 2) $\sin(\alpha + \beta)$.

533. Разложить на множители:

$$1) \sin 2\alpha - 2\sin\alpha; \quad 3) \cos\alpha - \sin 2\alpha;$$
$$2) \sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}; \quad 4) 1 - \sin 2\alpha - \cos^2\alpha.$$

534. Вычислить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{8}{17}$ и $\sin\frac{\alpha}{2} < 0$.

535. Вычислить n -й член и сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 10, d = 6, n = 23$;

3) $a_1 = 0, d = -2, n = 7$;

2) $a_1 = 42, d = \frac{1}{2}, n = 12$;

4) $a_1 = \frac{1}{3}, d = \frac{2}{3}, n = 18$.

536. Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 2, a_n = 120, n = 20$.

537. Доказать, что последовательность, n -й член которой равен $a_n = \frac{1-2n}{3}$, является арифметической прогрессией.

538. В геометрической прогрессии найти:

1) b_4 , если $b_1 = 5$ и $q = -10$; 2) b_1 , если $b_4 = -5000$ и $q = -10$.

539. Вычислить n -й член и сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 3, q = 2, n = 5$;

3) $b_1 = 8, q = \frac{1}{4}, n = 4$;

2) $b_1 = 1, q = 5, n = 4$;

4) $b_1 = 1, q = -3, n = 5$.

540. Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если $b_1 = \frac{1}{4}, q = 2, n = 6$.

541. Найти сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

1) $6, 4, \frac{8}{3}, \dots$; 3) $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$; 5) $\sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$;

2) $5, -1, \frac{1}{5}, \dots$; 4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$; 6) $-\sqrt{5}, -1, -\frac{\sqrt{5}}{5}, \dots$.

542. Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{20a^4b}$, где $a < 0, b > 0$; 3) $\sqrt{(a-1)^2}$, где $a < 1$;

2) $\sqrt[3]{8a^3b^4}$, где $a < 0, b > 0$; 4) $\sqrt{(3+a)^2}$, где $a > -3$.

543. Упростить выражение:

1) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, где $a > b$;

2) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, где $b > a$;

3) $\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$, где $x > 0$;

4) $\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$, где $x < 0$.

544. Какое из равенств является верным:

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \quad \text{или} \quad \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2?$$

545. Исключить иррациональность из знаменателя:

$$1) \frac{1}{2+\sqrt[3]{3}}; \quad 2) \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}; \quad 3) \frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}; \quad 4) \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}.$$

546. Упростить выражение:

$$1) \frac{\sqrt{ab} \sqrt[4]{a}}{(a+2)\sqrt[4]{a^{-1}b^2}} - \frac{a^2+4}{a^2-4}; \quad 3) \left(\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}} \right) \cdot \frac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{(a^{-1}b)^{\frac{1}{2}}};$$
$$2) \left(\frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}; \quad 4) \left(\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a-b} - \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \frac{a-b}{\sqrt{ab}}.$$

547. Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \frac{4}{x^2}$ на промежутке $x > 0$?

548. Найти область определения функции:

$$1) y = \sqrt{(x-2)(x-3)}; \quad 3) y = \frac{1}{x^2-2\sqrt{2}x+2}; \quad 5) y = \sqrt{\frac{(x-1)x}{x+5}};$$
$$2) y = \sqrt{x^2-6x}; \quad 4) y = \frac{3}{2\sqrt{3}x-x^2+3}; \quad 6) y = \sqrt{\frac{x^2-9}{x^2-2x}}.$$

549. Построить график функции и установить по графику ее основные свойства:

$$1) y = \frac{3}{x+1}; \quad 3) y = \frac{x+2}{x}; \quad 5) y = \sqrt{x-3};$$
$$2) y = \frac{1}{2-x}; \quad 4) y = \frac{3-x}{x}; \quad 6) y = \sqrt[3]{2-x}.$$

550. Решить уравнение:

$$1) \sqrt{x-2} = 4; \quad 3) \sqrt{2x+1} = \sqrt{x-1}; \quad 5) \sqrt[3]{6x-x^2} = x;$$
$$2) \sqrt{x+3} = 8; \quad 4) \sqrt[4]{x^2+12} = x; \quad 6) \sqrt{3-x} = \sqrt{1+3x}.$$

551. Упростить выражение:

$$1) y = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha};$$

$$3) y = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta};$$

$$2) \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha};$$

$$4) (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2.$$

552. Упростить выражение:

$$1) \frac{\operatorname{ctg} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\alpha - \frac{3}{2} \pi \right) - \sin(\pi + \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)(\cos(\alpha + 2\pi) + \sin(\alpha - 2\pi))};$$

$$2) \sin(x - 2\pi) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg}(\pi - x) \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + x\right).$$

553. Решить уравнение:

$$1) 1 - \cos x - 2\sin \frac{x}{2} = 0;$$

$$2) 1 + \cos 2x + 2\cos x = 0.$$

554. Доказать тождество:

$$1) \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)};$$

$$2) \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg} \alpha.$$

555. Доказать тождество:

$$1) 1 + \sin \alpha = 2\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$2) 1 - \sin \alpha = 2\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

556. Внутренние углы треугольника являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии с разностью $\frac{\pi}{6}$. Найти эти углы.

557. В арифметической прогрессии $a_1 + a_5 = \frac{5}{3}$; $a_3 a_4 = \frac{65}{72}$. Найти сумму первых 17 членов прогрессии.

558. Найти первые 4 члена геометрической прогрессии, если второй член прогрессии меньше первого на 35, а третий член больше четвертого на 560.

559. В геометрической прогрессии найти b_1 и b_5 , если $q = 3$, $S_6 = 1820$.

560. Сумма бесконечной убывающей прогрессии равна $\frac{8}{5}$, а второй член равен $-\frac{1}{2}$. Найти третий член прогрессии.

561. Сумма трех последовательных членов арифметической прогрессии равна 39. Если из первого числа вычесть 4, из второго 5, а из третьего 2, то полученные числа будут тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Найти эти числа.

Упростить выражение (562–563).

562. 1) $\sqrt{5 + \sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4 + \sqrt{7}}$.

563. 1) $\frac{1}{\sqrt{5}} \left[4(a+1) + (\sqrt[3]{a\sqrt{a}} - 1)^2 - \left(\frac{\sqrt[3]{ab^2 + \sqrt{a}}}{\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{b}}} + \sqrt[3]{a} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}}$, где $0 < a \leq 1$;

2) $\frac{a^{-1}b^{-2} - a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2} - b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}.$

564. Построить график функции:

1) $y = \frac{1}{|x-1|}$; 2) $y = \frac{3}{|x|} - 1$; 3) $y = \sqrt[3]{|x|}$; 4) $y = x^2 - 3|x| - 4$.

565. Вычислить $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -2,4$.

566. Доказать тождество:

1) $\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right).$

567. Найти четыре числа, обладающие следующими тремя свойствами:

а) сумма первого и четвертого чисел равна 11, а второго и третьего равна 2;

б) первое, второе и третье числа являются последовательными членами арифметической прогрессии;

в) второе, третье и четвертое числа являются последовательными членами геометрической прогрессии.

568. Пусть S_n — сумма первых n членов арифметической прогрессии. Доказать, что:

1) $S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n$; 2) $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n).$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ 7–9 КЛАССОВ

1. Числа и алгебраические преобразования

Вычислить (569–570).

569. 1) $(5,4 \cdot 1,2 - 3,7 : 0,8) (3,14 + 0,86) : 0,25$;

2) $(20,88 : 18 + 45 : 0,36) : (19,59 + 11,95)$;

3) $\left(5\frac{8}{9} - 3\frac{11}{12}\right) \cdot \frac{18}{71} - 7\frac{5}{6} : 15\frac{2}{3}$;

4) $\frac{7}{36} \cdot 9 + 8 \cdot \frac{11}{32} + \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{18}$.

570. 1) $\left(3\frac{4}{25} + 20,24\right) \cdot 2,15 + \left(5,1625 - 2\frac{3}{16}\right) \cdot \frac{2}{5}$;

2) $0,364 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0,125 + 2,5 \cdot 0,8$;

3) $\frac{\left(3,25 - \frac{3}{4}\right) \cdot 6,25}{(2 - 0,75) : \frac{4}{5}} + \frac{\left(5,5 - 3\frac{3}{4}\right) : 5}{(-2 - 0,8) \cdot 1\frac{3}{4}}$;

4) $\frac{\left(2\frac{3}{20} + 1\frac{5}{16}\right) : 27,7}{\left(1,75 \cdot \frac{2}{3} - 1,75 \cdot 1\frac{1}{8}\right) : \frac{7}{12}}$.

571. Найти неизвестный член пропорции:

1) $x : 7 = 9 : 3$;

4) $9\frac{1}{2} : 14\frac{1}{4} = x : 0,75$;

2) $125 : 25 = 35 : x$;

5) $\frac{x}{6\frac{5}{6}} = \frac{3,9}{4,1}$;

3) $144 : x = 36 : 3$;

6) $0,3 : x = \frac{4}{9} : 3\frac{1}{3}$.

572. Найти p процентов от числа a , если:

1) $a = 400, p = 27$;

3) $a = 2500, p = 0,2$;

2) $a = 2,5, p = 120$;

4) $a = 4,5, p = 2,5$.

573. Найти число, если p процентов от него равны b :

1) $p = 23, b = 690$;

3) $p = 125, b = 3,75$;

2) $p = 3,2, b = 9,6$;

4) $p = 0,6, b = 21,6$.

574. Какой процент составляет число a от числа b :

1) $a = 24, b = 120$;

3) $a = 650, b = 13$;

2) $a = 4,5, b = 90$;

4) $a = 0,08, p = 0,48$?

575. Выполнить действия:

- 1) $(-3a^3b)(-2ab^2)(-5a^3b^7)$; 3) $(-5ab^4c)^3 \cdot \left(-\frac{1}{5}a^5bc^2\right)^2$;
2) $35a^5b^4c : (7ab^3c)$; 4) $\left(-\frac{2}{3}a^4b^3c^2\right)^3 : \left(-\frac{1}{3}a^2bc^3\right)^2$.

576. Записать выражение в виде многочлена стандартного вида:

- 1) $(x - 6)(5 + x) - x^2(x^2 - 5x + 1)$;
2) $(x + 7)(5 - x) - x^2(x^3 + 2x - 1)$;
3) $(b - 3a)^2 + 8\left(a - \frac{1}{2}b\right)\left(a + \frac{1}{2}b\right)$;
4) $(3a + 6)^2 + 4\left(b - \frac{1}{2}a\right)\left(b + \frac{1}{2}a\right)$.

577. Найти числовое значение выражения:

- 1) $a^3 - ba^2$ при $a = -0,6$, $b = 9,4$;
2) $ab^2 + b^3$ при $a = 10,7$, $b = -0,7$;
3) $(m - 5)(2m - 3) - 2m(m - 4)$ при $m = \frac{3}{5}$;
4) $(3a - 2)(a - 4) - 3a(a - 2)$ при $a = \frac{3}{4}$.

578. Выполнить действия:

- 1) $(-15x^5 + 10x^4 - 25x^3) : (-5x^2) - 3(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$;
2) $(9a^2b^3 - 12a^4b^4) : 3a^2b - b^2 \cdot (2 + 3a^2b)$.

Разложить на множители (579–583).

579. 1) $1 - \frac{a^2}{4}$; 2) $\frac{b^2}{9} - 1$; 3) $a^2 - b^4$; 4) $b^4 - 9$.

580. 1) $1 - a + \frac{a^2}{4}$; 3) $49a^2 - 14a + 1$;

2) $0,25b^2 + b + 1$; 4) $1 + 18b + 81b^2$.

581. 1) $y^2 - xy - y + x$; 3) $3a^2 + 3ab + a + b$;

2) $a^2 - ax - x + a$; 4) $5a^2 - 5ax - 7a + 7x$.

582. 1) $6m^4n + 12m^3n + 3m^2n$; 3) $a^2 - 2ab + b^2 - y^2$;

2) $2a^5b - 4a^4b + 2a^3b$; 4) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2$.

$$583. 1) x^2 + 3x - 28; \quad 3) 2x^2 - 5x + 3;$$

$$2) 2x^2 - 12x + 18; \quad 4) x^2 + x - 2.$$

584. Сократить дробь:

$$1) \frac{4-b^2}{4b+2b^2}; \quad 3) \frac{5a^2-10ab}{ab-2b^2}; \quad 5) \frac{x^2-x-12}{x^2-16}; \quad 7) \frac{3x^2-2x-8}{2x^2-3x-2};$$

$$2) \frac{b^2-9}{3b^2-9b}; \quad 4) \frac{3xy-21y^2}{4x^2-28xy}; \quad 6) \frac{x^2-x-20}{x^2-25}; \quad 8) \frac{2x^2+x-3}{2x^2+7x+6}.$$

Упростить выражение (585–589).

$$585. 1) \frac{a^6}{6c^3} : \frac{a^2}{4c^3}; \quad 4) \left(\frac{3c}{k^2}\right) : \frac{9c}{k^3}; \quad 7) \frac{4x(x-1)+1}{4-x^2} : \frac{1-2x}{x-2};$$

$$2) \frac{9a^2}{m^8} : \frac{6a^2}{m^5}; \quad 5) \frac{5a}{28b^2} \cdot 8ab \cdot \frac{7b}{5a^3}; \quad 8) \frac{x^2-4(x-1)}{x-1} : \frac{2-x}{1-x^2}.$$

$$3) \left(\frac{4a}{b^3}\right)^2 \cdot \frac{b^4}{8a}; \quad 6) \left(-\frac{25a^4b^3}{14c^2}\right) \cdot \frac{-21c}{10a^3b^3};$$

$$586. 1) \frac{a-3}{a+3} - \frac{a^2+27}{a^2-9}; \quad 3) \frac{a+1}{a^2-ax} - \frac{x+1}{a^2-x^2};$$

$$2) \frac{a^2+12}{a^2-4} - \frac{a+3}{a-2}; \quad 4) \frac{3-a}{ab-a^2} - \frac{3-b}{b^2-a^2}.$$

$$587. 1) \frac{4}{a-b} + \frac{9}{a+b} - \frac{8a}{a^2-b^2}; \quad 3) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right)ab;$$

$$2) \frac{42}{4a^2-9} + \frac{8}{2a+3} + \frac{7}{3-2a}; \quad 4) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab}\right)ab.$$

$$588. 1) \frac{1}{(x+3)^2} : \frac{x}{x^2-9} - \frac{x-9}{x^2-9}; \quad 3) a+b - \frac{a^2}{a-1};$$

$$2) \frac{a+6}{a^2-4} - \frac{1}{a^2-4} \cdot \frac{(a+2)^2}{a}; \quad 4) \frac{a^2}{a+1} - a + 1.$$

$$589. 1) \frac{b^2}{a^2-2ab} : \left(\frac{2ab}{a^2-4b^2} - \frac{b}{a+2b}\right); \quad 3) \left(\frac{2xy}{x^2-9y^2} - \frac{y}{x-3y}\right) : \frac{y^2}{x^2+3xy};$$

$$2) \left(\frac{xy}{x^2-y^2} - \frac{y}{2x-2y}\right) : \frac{3y}{x^2-y^2}; \quad 4) \left(\frac{2a+1}{2a-1} - \frac{2a-1}{2a+1}\right) \cdot \frac{10a-5}{4a}.$$

590. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\frac{a+1}{a-1} + \frac{6}{a^2-1} - \frac{a+3}{a+1}$ при $a = -9$;

2) $\frac{b+5}{b+2} - \frac{3}{b^2-4} - \frac{b+1}{b-2}$ при $b = -8$;

3) $\frac{a-2}{a-3} : \left(\frac{a^2-6a+10}{a^2-9} + \frac{2}{a+3} \right)$ при $a = -1\frac{1}{2}$;

4) $\frac{b+1}{b-4} : \left(\frac{b^2+9}{b^2-16} + \frac{2}{b+4} \right)$ при $b = 4\frac{1}{3}$.

591. Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 3^{-2} : 3^{-5}$;

2) $(-6)^0 \cdot 81^{-2} \cdot 27^3$.

592. Сократить дробь:

1) $\frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}$;

2) $\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$;

3) $\frac{y-9y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{y^4+3}}$;

4) $\frac{x+x^{\frac{1}{2}}}{x-1}$.

Вычислить (593–595).

1) $(6-3\sqrt{5})(6+3\sqrt{5})$;

3) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{20})\sqrt{5}$;

2) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$;

4) $(1-\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2$.

594. 1) $4\sqrt{3}-\sqrt{3}(\sqrt{16}-\sqrt{3})$;

4) $\sqrt{50}-\sqrt{32}-\frac{1}{8}\sqrt{18}$;

2) $6\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{36})$;

5) $(\sqrt{2}+3)^2-3\sqrt{8}$;

3) $\sqrt{48}-\sqrt{27}-\frac{1}{2}\sqrt{12}$;

6) $(2-\sqrt{3})^2+2\sqrt{12}$.

595. 1) $(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}})^2$;

3) $\frac{1}{5-\sqrt{5}}-\frac{1}{5+\sqrt{5}}$;

2) $(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}})^2$;

4) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}$.

596. Упростить:

$$1) \frac{1}{3-\sqrt{2}} + \frac{1}{3+\sqrt{2}};$$

$$3) \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} + \frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}};$$

$$2) \frac{1}{5-\sqrt{3}} - \frac{1}{5+\sqrt{3}};$$

$$4) \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

597. Записать число в стандартном виде:

$$1) 0,00051; \quad 2) \frac{1}{500}; \quad 3) 250000; \quad 4) \frac{8}{2500}.$$

Вычислить (598–599).

$$598. \quad 1) \frac{(0,25)^5 \cdot 8^6}{2^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8}; \quad 2) \frac{16 \cdot 4^{-2} + 4 \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{4 + \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

$$599. \quad 1) \sqrt{8,75^3 - 8,75^2 \cdot 7,25}; \quad 2) \frac{0,625 \cdot 6,75^2 - 3,25^2 \cdot 0,625}{\sqrt{3,5^2 + 7 \cdot 2,75 + 2,75^2}}.$$

600. Упростить выражение при $x > 0, y > 0$:

$$1) \sqrt{\frac{4}{81} x^6 y^{20}}; \quad 2) \sqrt{x^4 y^{18}}; \quad 3) \sqrt[3]{27 x^3 y^6}; \quad 4) \sqrt[5]{x^5 y^{10}}.$$

601. Упростить выражение:

$$1) \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} + \frac{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b} \right) \cdot \frac{a - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a+b};$$

$$3) \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-x} \right);$$

$$2) \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}+a} - \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1} \right) \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-1};$$

$$4) \frac{m+2m^{\frac{1}{2}}+1}{2m^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{2m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}-1} - \frac{4m^{\frac{1}{2}}}{m-1} \right).$$

2. Уравнения

Решить уравнение (602–614).

$$602. \quad 1) 8(3x - 7) - 3(8 - x) = 5(2x + 1);$$

$$2) 10(2x - 1) - 9(x - 2) + 4(5x + 8) = 71;$$

$$3) 3 + x(5 - x) = (2 - x)(x + 3);$$

$$4) 7 - x(3 + x) = (x + 2)(5 - x).$$

$$603. 1) \frac{5x-7}{6} - \frac{x+2}{7} = 2;$$

$$2) \frac{4x-8}{3} - \frac{3+2x}{5} = 8;$$

$$604. 1) \frac{4}{3(x+2)} = \frac{9}{8x+11};$$

$$2) \frac{1}{3(x-1)} = \frac{3}{2(x+6)};$$

$$605. 1) x(x-1) = 0;$$

$$2) (x+2)(x-3) = 0;$$

$$606. 1) x^2 + 3x = 0;$$

$$2) 5x - x^2 = 0;$$

$$3) 4x + 5x^2 = 0;$$

$$4) -6x^2 - x = 0;$$

$$607. 1) 2x^2 + x - 10 = 0;$$

$$608. 1) 7x^2 - 13x - 2 = 0;$$

$$3) \frac{14-x}{4} - \frac{3x+1}{5} = 3;$$

$$4) \frac{2x-5}{4} - \frac{6x+1}{8} = 2.$$

$$3) \frac{x}{5-x} + \frac{5-x}{5+x} = -2;$$

$$4) \frac{x+3}{x-3} + \frac{x}{x+3} = 2.$$

$$3) x\left(2x - \frac{1}{2}\right)(4+3x) = 0$$

$$4) \frac{(x-5)(x+1)}{x^2+1} = 0.$$

$$5) 2x^2 - 32 = 0;$$

$$6) 2 - \frac{x^2}{2} = 0;$$

$$7) \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = 0;$$

$$8) x^2 - 8 = 0.$$

$$2) 2x^2 - x - 3 = 0;$$

$$2) 4x^2 - 17x - 15 = 0.$$

$$609. 1) (3x+4)^2 + 3(x-2) = 46; \quad 3) (5x-3)(x+2) - (x+4)^2 = 0;$$

$$2) 2(1-1,5x) + 2(x-2)^2 = 1; \quad 4) x(11-6x) - 20 + (2x-5)^2 = 0.$$

$$610. 1) |x| = \frac{1}{2};$$

$$3) |3-x| = 2;$$

$$5) |2,5-x| + 3 = 5;$$

$$2) |x-1| = 4;$$

$$4) |3x| - 3x = 6;$$

$$6) |3,7+x| - 2 = 6;$$

$$611. 1) \frac{7}{2x+9} - 6 = 5x;$$

$$3) \frac{x}{x^2-16} + \frac{x-1}{x+4} = 1;$$

$$2) \frac{x^2}{x-2} - \frac{x+2}{x-2} = 4;$$

$$4) \frac{12}{(x+6)^2} + \frac{x}{x+6} = 1.$$

$$612. 1) x^4 - 17x^2 + 16 = 0; \quad 3) 2x^4 - 5x^2 - 12 = 0;$$

$$2) x^4 - 37x^2 + 36 = 0; \quad 4) x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$$

$$613. 1) \sqrt{x+1} - 5 = 0; \quad 3) \sqrt{5-x} - 1 = x; \quad 5) 7x - \sqrt{2x+2} = 5x;$$

$$2) 6 - \sqrt{x+3} = 0; \quad 4) 3 + \sqrt{x-5} = x - 4; \quad 6) 12x - \sqrt{5x-4} = 11x.$$

$$614. 1) 2^{x-1} = 64; \quad 2) 3^{1-x} = 27; \quad 3) 3^{x-8} = 27; \quad 4) 7^{2x-1} = 49.$$

615. Решить уравнение графическим способом:

$$1) x^3 = 3x + 2; \quad 3) \frac{5}{x} = 6 - x; \quad 5) \sqrt{x} = \frac{x+3}{4};$$

$$2) x^3 = -x - 2; \quad 4) x^{-1} = 2x - 1; \quad 6) \sqrt{x} = 6 - x.$$

Решить систему уравнений (616–618).

$$616. 1) \begin{cases} x + y = 12, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x + 3y = 11, \\ 2x - y = 7; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = 10, \\ y - x = 4; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x + 5y = 21, \\ 6x + 5y = 27; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 4x - 3y = 1, \\ 3x + y = -9. \end{cases}$$

$$617. 1) \begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{3y}{4} = 2, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 5; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \frac{1}{2}(x + 11) = \frac{1}{3}(y + 13) + 2, \\ 5x = 3y + 8; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{3}{7}x - \frac{2}{5}y = 2, \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}y = 12\frac{1}{6}; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{1}{4}(x + 3y) = \frac{1}{3}(x + 2y), \\ x + 5y = 12. \end{cases}$$

$$618. 1) \begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -15; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 15; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x + y = -5, \\ xy = -36; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = 20. \end{cases}$$

3. Неравенства

Решить неравенство (619–620).

619. 1) $3x - 7 < 4(x + 2)$;

3) $1,5(x - 4) + 2,5x < x + 6$;

2) $7 - 6x \geq \frac{1}{3}(9x - 1)$;

4) $1,4(x + 5) + 1,6x > 9 + x$.

620. 1) $\frac{x-1}{3} - \frac{x-4}{2} \leq 1$;

3) $\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{3} \geq 7$;

5) $x + \frac{x-3}{6} > 3$;

2) $\frac{x+4}{5} - \frac{x-1}{4} \geq 1$;

4) $\frac{2x-5}{4} - \frac{3-2x}{5} < 1$;

6) $x + \frac{x+2}{4} < 3$.

621. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} x + 5 \geq 5x - 3, \\ 2x - 5 < 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 1 \leq 7 + x, \\ -0,2x > 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + 3 \geq 0, \\ x - 7 < 4x - 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 2 \geq 10 - x, \\ -0,5x < 1. \end{cases}$

622. Найти все натуральные решения неравенства:

1) $\frac{x-2}{6} - x \geq \frac{x-8}{3}$;

2) $\frac{x+5}{2} > \frac{x-5}{4} + x$.

623. Найти все целые числа, удовлетворяющие системе неравенств:

1) $\begin{cases} 2(x + 1) < 8 - x, \\ -5x - 9 < 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y + \frac{2y-13}{11} > 2, \\ \frac{y}{6} - \frac{3y-20}{9} < -\frac{2}{3}(y-7); \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3(x - 1) > x - 7, \\ -4x + 7 > -5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{y-1}{2} - \frac{y-3}{4} \geq \frac{y-2}{3} - y, \\ 1 - y \geq \frac{1}{2}y - 4. \end{cases}$

624. Найти все целые отрицательные числа, удовлетворяющие си-

стеме неравенств $\begin{cases} \frac{3x-2}{4} + 2\frac{1}{2} > \frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{6}, \\ \frac{2x-5}{3} - \frac{3x-1}{2} < \frac{3-x}{5} - \frac{2x-1}{4}. \end{cases}$

625. Решить квадратное неравенство:

- 1) $x^2 - 3x + 2 > 0$; 4) $-x^2 + 3x - 1 \geq 0$; 7) $2x^2 - x - 1 < 0$;
2) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$; 5) $3 + 4x + 8x^2 < 0$; 8) $3x^2 + x - 4 > 0$.
3) $x^2 - 7x + 12 > 0$; 6) $x - x^2 - 1 \geq 0$;

626. Решить неравенство:

- 1) $|x| > \frac{1}{5}$; 2) $|x - 1| < 2\frac{1}{3}$; 3) $|x - 1| > 3$; 4) $|x - 1| \leq 2$.

627. Решить методом интервалов неравенство:

- 1) $(x - 1)(x + 3) > 0$; 4) $x(x - 8)(x - 7) > 0$;
2) $(x + 4)(x - 2) < 0$; 5) $(x - 1)\left(x^2 - \frac{1}{9}\right) \geq 0$;
3) $(x + 1,5)(x - 2)x > 0$; 6) $(x + 3)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \leq 0$.

628. Сравнить числа:

- 1) $5\sqrt{2}$ и 7; 3) $10\sqrt{11}$ и $11\sqrt{10}$; 5) $3\sqrt[3]{3}$ и $2\sqrt[3]{10}$;
2) 9 и $4\sqrt{5}$; 4) $5\sqrt{6}$ и $6\sqrt{5}$; 6) $2\sqrt[6]{3}$ и $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$.

4. Задачи на составление уравнений

629. Сумма двух чисел равна 120, а их разность равна 5. Найти эти числа.

630. На путь по течению реки катер затратил 3 ч, а на обратный путь 4,5 ч. Найти скорость течения реки, если скорость катера относительно воды равна 25 км/ч.

631. Моторная лодка прошла путь от А до В по течению реки за 2,4 ч, а обратный путь за 4 ч. Найти скорость течения реки, если известно, что скорость моторной лодки относительно воды равна 16 км/ч.

632. Катер проплыл 15 км вниз по течению реки за 1 ч и вернулся на ту же пристань, потратив на обратный путь 1,5 ч. Найти скорость катера относительно воды и скорость течения реки.

633. Периметр равнобедренного треугольника равен 5,4 дм. Боковая сторона длиннее основания в 13 раз. Найдите длины сторон треугольника.

634. Скорость трамвая новой конструкции на 5 км/ч больше, чем скорость прежнего трамвая, поэтому он проходит маршрут в

20 км на 12 мин. быстрее, чем трамвай старой конструкции. За какое время новый трамвай проходит этот маршрут?

635. Некоторую часть дня автобус работает в режиме экспресса. При этом его рейсовая скорость увеличивается на 8 км/ч, а время, затраченное на маршрут в 16 км, сокращается на 4 мин. За какое время автобус проходит этот маршрут в режиме экспресса?
636. Одно фермерское хозяйство собрало со своего участка 875 ц пшеницы, а другое с участка, меньшего на 2 га, — 920 ц пшеницы. Сколько центнеров пшеницы собрало каждое хозяйство с 1 га, если известно, что во втором хозяйстве с 1 га собрали на 5 ц пшеницы больше, чем в первом?
637. При одновременной работе двух насосов пруд был очищен за 2 ч 55 мин. За сколько времени мог бы очистить пруд каждый насос, работая отдельно, если один из них может эту работу выполнить на 2 ч быстрее другого?

5. Функции и графики

638. Выяснить, принадлежит ли точка A графику данной функции; найти координаты точек пересечения графика этой функции с осями координат и значение функции при $x = -2$:

1) $y = 3 - 0,5x$, $A(4; 1)$; 3) $y = 2,5x - 5$, $A(1,5; -1,25)$;

2) $y = \frac{1}{2}x - 4$, $A(6; -1)$; 4) $y = -1,5x + 6$, $A(4,5; -0,5)$.

639. Построить графики функций (в одной координатной плоскости):

1) $y = 3x$, $y = -3x$; 3) $y = x - 2$, $y = x + 2$;

2) $y = \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{1}{3}x$; 4) $y = -x - 2$, $y = 2 - x$.

640. Построить график функции:

1) $y = x^2 + 2\frac{1}{4}$; 3) $y = (x + 2,5)^2 - \frac{1}{4}$; 5) $y = x^2 + 2x - 3$;

2) $y = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$; 4) $y = x^2 - 4x + 5$; 6) $y = -x^2 - 3x + 4$.

641. Найти координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 - 8x + 16$; 3) $y = x^2 + 4x - 3$;

2) $y = x^2 - 10x + 15$; 4) $y = 2x^2 - 5x + 3$.

642. Найти наибольшее или наименьшее значение функции:

1) $y = x^2 - 7x - 10$;

3) $y = x^2 - x - 6$;

2) $y = -x^2 + 8x + 7$;

4) $y = 4 - 3x - x^2$.

643. Построить в одной координатной плоскости графики двух данных функций и определить, при каких значениях x равны значения этих функций:

1) $y = x^2 - 4$ и $y = 3x$;

2) $y = (x + 3)^2 + 1$ и $y = -x$.

644. Построить эскиз графика и перечислить свойства функции:

1) $y = x^4$;

2) $y = x^5$;

3) $y = \frac{1}{x^3}$;

4) $y = \frac{1}{x^4}$.

645. Сравнить значения выражений:

1) $\sqrt[3]{5,3}$ и $\sqrt[3]{5\frac{1}{3}}$;

2) $\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}$ и $\sqrt[3]{-\frac{1}{7}}$.

646. Построить график функции и найти значения x , при которых $y = 0$, $y > 0$, $y < 0$:

1) $y = 2x^2 - 3$;

3) $y = 2(x - 1)^2$;

5) $y = 2(x - 3)^2 + 1$;

2) $y = -2x^2 + 1$;

4) $y = 2(x + 2)^2$;

6) $y = -3(x - 1)^2 + 5$.

6. Элементы тригонометрии

647. Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку с координатами:

1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

648. Упростить выражение:

1) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$;

2) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{ctg} \alpha) - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

649. Доказать тождество:

1) $\frac{1 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha \cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$;

2) $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha$.

Упростить выражение (650–651).

650. 1) $\sin^2(\alpha + 8\pi) + \cos(\alpha + 10\pi)$; 2) $\cos^2(\alpha + 6\pi) + \cos^2(\alpha - 4\pi)$.

651. 1) $\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$;

2) $\frac{\sin 2\alpha}{2(1 - 2 \cos^2 \alpha)} + \frac{\sin \alpha \cos(\pi - \alpha)}{1 - 2 \sin^2 \alpha}$.

652. Доказать тождество $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} - \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \sin x + \cos x$.

653. Вычислить:

1) $\sin 2\alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

654. Найти значение выражения:

1) $\cos 765^\circ - \sin 750^\circ - \cos 1035^\circ$; 2) $\sin \frac{11\pi}{3} + \cos 690^\circ - \cos \frac{19\pi}{3}$.

655. Найти значение выражения, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$:

1) $\frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha \sin \alpha}$; 2) $\frac{2 - \sin^2 \alpha}{3 + \cos^2 \alpha}$.

656. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$. Найти $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

657. Упростить выражение:

1) $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$; 2) $\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) - \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$.

658. Упростить выражение $\frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha}{\sin(-\alpha) - \sin(2,5\pi + \alpha)}$.

7. Прогрессии

659. Найти разность арифметической прогрессии, если $a_1 = 7$, $a_7 = -5$.

660. Найти первый член арифметической прогрессии, если $a_{10} = 4$, $d = 0,5$.

661. Вычислить первый член и сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_n = 459$, $d = 10$, $n = 45$; 2) $a_n = 121$, $d = -5$, $n = 17$.

662. Найти номер n , если в арифметической прогрессии $a_1 = -2$, $a_5 = -6$, $a_n = -40$.

663. Найти сумму десяти первых членов последовательности, заданной формулой $b_{n+1} = -\frac{b_n}{2}$ и условием $b_1 = 1024$.

664. В геометрической прогрессии найти:

- 1) n , если $b_1 = 5$, $q = -10$ и $b_n = -5000$;
- 2) q , если $b_3 = 16$ и $b_6 = 2$;
- 3) b_1 , если $b_3 = 16$ и $b_6 = 2$
- 4) b_7 , если $b_3 = 16$ и $b_6 = 1$.

665. Найти сумму чисел $3 + 6 + 12 + \dots + 96$, если ее слагаемые являются последовательными членами геометрической прогрессии.

666. Вычислить первый член и разность арифметической прогрессии, если:

- 1) $a_3 = 25$, $a_{10} = -3$;
- 2) $a_4 = 10$, $a_7 = 19$;
- 3) $a_2 + a_7 = 4$, $a_2 + a_{14} = -8$;
- 4) $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 \cdot a_5 = 28$;

667. Найти десятый член арифметической прогрессии, если:

- 1) $a_9 = -5$ и $a_{11} = 7$;
- 2) $a_9 + a_{11} = -10$;
- 3) $a_9 + a_{10} + a_{11} = 12$.

668. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, у которой $S_7 = -35$ и $S_{42} = -1680$.

669. Является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой n -го члена:

- 1) $b_n = -3^{2n}$;
- 2) $b_n = 2^{3n}$;
- 3) $b_n = \frac{3}{2n}$;
- 4) $b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$?

670. Вычислить знаменатель геометрической прогрессии, если:

- 1) $b_1 = 12$, $S_3 = 372$;
- 2) $b_1 = 1$, $S_3 = 157$.

671. Найти первый член, знаменатель и формулу n -го члена геометрической прогрессии, если $b_2 = -\frac{1}{2}$ и $b_4 = -\frac{1}{72}$.

672. Найти четвертый член и знаменатель геометрической прогрессии, если $b_3 = -6$ и $b_5 = -24$.

673. Между числами $\frac{1}{3}$ и 27 вставить три числа так, чтобы получилось пять последовательных членов геометрической прогрессии.

674. В геометрической прогрессии найти:

- 1) b_1 и b_5 , если $q = 3$, $S_3 = 484$;
- 2) b_1 и q , если $b_3 = 0,024$, $S_3 = 0,504$.

675. Вычислить первый член и знаменатель прогрессии, если:

- 1) $b_1 + b_2 = 20$, $b_2 + b_3 = 60$;
- 2) $b_1 + b_2 = 60$, $b_1 + b_3 = 51$.

Числа и числовые выражения

1. Число. Множество *натуральных* чисел: 1, 2, 3

Множество *целых* чисел: 0; ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ;

Множество *рациональных* чисел — числа вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число. Например, числа $\frac{3}{5}$; 2; $-\frac{2}{7}$ — рациональные числа.

Рациональные числа можно представить в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби.

Например, $\frac{2}{5} = 0,4$; $-\frac{1}{3} = -0,333 = -0,(3)$.

Множество *иррациональных* чисел — множество бесконечных непериодических десятичных дробей.

Например, 0,1001000100001... — иррациональное число.

Иррациональными числами являются также числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

Множество *действительных* чисел — рациональные и иррациональные числа.

2. Числовые промежутки — отрезки, интервалы и полуинтервалы, лучи.

Отрезок $[a; b]$ — множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$, где $a < b$. Например, отрезок $[2; 5]$ — это множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $2 \leq x \leq 5$.

Интервал $(a; b)$ — множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, где $a < b$. Например, интервал $(-2; 3)$ — это множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $-2 < x < 3$.

Полуинтервал $[a; b)$ — множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x < b$; полуинтервал $(a; b]$ — множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a < x \leq b$. Например, полуинтервал $[3; 8)$ — множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $3 \leq x < 8$. $(-4; 2]$ — множество чисел x таких, что $-4 < x \leq 2$.

Луч — множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > a$, или $x < a$, или $x \geq a$, или $x \leq a$. Например, луч $x \geq 5$ — множество чисел x , не меньших 5.

3. Модуль числа a (обозначается $|a|$) определяется формулой

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Геометрически $|a|$ — расстояние от точки 0 до точки, изображающей число a ; $|a - b|$ — расстояние между точками a и b .

Для любого числа a выполняется неравенство $|a| \geq 0$, причем $|a| = 0$ только при $a = 0$.

Неравенству $|x| \leq a$, где $a > 0$, удовлетворяют числа x из отрезка $[-a; a]$, т. е. такие числа x , что $-a \leq x \leq a$.

Неравенству $|x| < a$, где $a > 0$, удовлетворяют все числа x из интервала $(-a; a)$, т. е. такие числа x , что $-a < x < a$.

Неравенству $|x| \geq a$, где $a > 0$, удовлетворяют все числа $x \leq -a$ и числа $x \geq a$.

Неравенству $|x| > a$, где $a > 0$, удовлетворяют все числа $x < -a$ и числа $x > a$.

4. Числовое выражение — запись, состоящая из чисел, соединенных знаками действий.

Например, $1,2 \cdot (-3) - 9:0,5$ — числовое выражение.

Значение числового выражения — число, полученное в результате выполнения действий, указанных в этом выражении. Например, число $-21,6$ — значение выражения $1,2 \cdot (-3) - 9:0,5$.

5. Порядок выполнения действий.

Действия первой ступени — сложение и вычитание.

Действия второй ступени — умножение и деление.

Действие третьей ступени — возведение в степень.

1) Если выражение не содержит скобок, то сначала выполняют действия третьей ступени, затем действия второй ступени и, наконец, действия первой ступени; при этом действия одной и той же ступени выполняются в том порядке, в котором они записаны.

2) Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия над числами, заключенными в скобках, а затем все остальные действия; при этом выполнение действий над числами в скобках и вне скобок производится в порядке, указанном в п. 1.

3) Если вычисляется значение дробного выражения, то выполняются действия в числителе дроби и в знаменателе и первый результат делится на второй.

4) Если выражение содержит скобки, заключенные внутри других скобок, то сначала выполняют действия во внутренних скобках.

6. Стандартный вид числа — запись числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq |a| < 10$, n — целое число, a — мантисса числа, n — порядок числа. Например, $345,4 = 3,454 \cdot 10^2$, $0,003 = 3 \cdot 10^{-3}$, $-0,12 = -1,2 \cdot 10^{-1}$.

7. Погрешность приближения.

Абсолютная погрешность приближения — модуль разности между точным значением величины и ее приближенным значением. Если a — приближенное значение, а x — точное, то абсолютная погрешность равна $|x - a|$.

Запись $x = a \pm h$ означает, что абсолютная погрешность приближения не превосходит h , т. е. $|x - a| \leq h$, или $a - h \leq x \leq a + h$. При этом говорят, что x равно a с точностью до h . Например, запись $\pi = 3,14 \pm 0,01$ означает, что $|\pi - 3,14| \leq 0,01$, т. е. число π равно $3,14$ с точностью до $0,01$.

При округлении положительного числа с недостатком с точностью до 10^{-n} сохраняются n первых знаков после запятой, а последующие отбрасываются. Например, при округлении числа $17,2397$ с недостатком до тысячных, т. е. до 10^{-3} , получаем $17,239$, до сотых — $17,23$, до десятых — $17,2$.

При округлении положительного числа с избытком с точностью до 10^{-n} n -й знак после запятой увеличивается на единицу, а все последующие отбрасываются. Например, при округлении числа $2,5143$ с избытком до тысячных получаем $2,515$, до сотых — $2,52$, до десятых — $2,6$.

Погрешность округления в обоих случаях не превосходит 10^{-n} .

Округление с наименьшей погрешностью: если первая отбрасываемая цифра данного числа меньше 5, то округляют с недостатком, а если эта цифра больше или равна 5, то округляют с избытком. Например, при округлении числа $8,351$ до сотых получаем $8,35$, а при округлении до десятых — $8,4$.

Запись $x \approx a$ означает, что число a является приближенным значением числа x . Например, $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Относительная погрешность — частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближенного значения величины. Если x — точное значение, a — приближенное, то относительная погрешность равна $\frac{|x-a|}{|a|}$.

Относительную погрешность обычно выражают в процентах. Например, если точное значение величины равно 1,95, а приближенное значение равно 2, то относительная погрешность приближения равна

$$\frac{|2 - 1,95|}{|2|} = \frac{|0,05|}{|2|} = 0,25 \text{ или } 2,5\%.$$

Алгебраические выражения

8. Алгебраическое выражение — выражение, состоящее из чисел и букв, соединенных знаками действий. Примеры алгебраических выражений:

$$2(m + n); 3a + 2ab - 1; (a - b)^2; \frac{2x + y}{z}.$$

Значение алгебраического выражения — число, полученное в результате вычислений после замены в этом выражении букв числами. Например, числовое значение выражения $3a + 2ab - 1$ при $a = 2$ и $b = 3$ равно $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 17$.

9. Алгебраическая сумма — запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединенных знаками «+» или «-».

Правила раскрытия скобок.

1) Если к алгебраическому выражению прибавляется алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы, например:

$$14 + (7 - 23 + 21) = 14 + 7 - 23 + 21, \\ a + (b - c - d) = a + b - c - d.$$

2) Если из алгебраического выражения вычитается алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы на противоположный, например,

$$14 - (7 - 23 + 21) = 14 - 7 + 23 - 21, \\ a - (b - c - d) = a - b + c + d.$$

10. Одночлен — алгебраическое выражение, представляющее собой произведение числовых и буквенных множителей.

Примеры одночленов: $3ab$; $-2ab^2c^3$; a^2 ; a ; $0,6xy^5y^2$; $-t^4$.

Например, числовыми множителями одночлена $3a^2(0,4) \cdot b(-5)c^3$ являются 3; 0,4; -5, а буквенными — a^2, b, c^3 .

Одночлен стандартного вида — одночлен, который содержит только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями.

Чтобы записать одночлен в стандартном виде, нужно перемножить все его числовые множители и поставить их произведение на первое место, затем произведения всех одинаковых буквенных множителей записать в виде степеней.

Коэффициент одночлена — числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде.

Например, коэффициент одночлена $\frac{3}{4}abc^2$ равен $\frac{3}{4}$, коэффициент одночлена $-7a^3b$ равен -7, коэффициент одночлена a^2bc равен 1, коэффициент одночлена $-ab^2$ равен -1.

11. Многочлен — алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Примеры многочленов: $4ab^2c^3$ — одночлен, $2ab - 3bc$ — двучлен, $4ab + 3ac - bc$ — трехчлен.

Члены многочлена — одночлены, из которых состоит многочлен. Например, членами многочлена $2ab^2 - 3a^2c + 7bc - 4bc$ являются одночлены $2ab^2, -3a^2c, 7bc, -4bc$.

Подобные члены — одночлены, отличающиеся только коэффициентами, или одинаковые одночлены.

Приведение подобных членов — упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом, например:

$$2ab - 4bc + ac + 3ab + bc = 5ab - 3bc + ac.$$

Стандартный вид многочлена — запись многочлена, в которой все члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.

Действия над одночленами и многочленами.

1) Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены, например:

$$\begin{aligned} (2a^2b - 3bc) + (a^2b + 5bc) - (3a^2b - bc) = \\ = 2a^2b - 3bc + a^2b + 5bc - 3a^2b + bc = 3bc. \end{aligned}$$

2) Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить, например:

$$(2ab - 3bc)(4ac) = (2ab)(4ac) + (-3bc)(4ac) = 8a^2bc - 12abc^2.$$

3) Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить, например:

$$(5a - 2b)(3a + 4b) = (5a)(3a) + (5a)(4b) + (-2b)(3a) + (-2b)(4b) = 15a^2 + 14ab - 8b^2.$$

4) Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить, например:

$$(4a^3b^2 - 12a^2b^3) : (2ab) = (4a^3b^2) : (2ab) + (-12a^2b^3) : (2ab) = 2a^2b - 6ab^2.$$

12. Формулы сокращенного умножения.

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$;

4) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$;

5) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;

6) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

7) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

13. Разложение многочлена на множители — представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов, например, $4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$.

При разложении многочлена на множители используются следующие способы.

1) **Вынесение общего множителя за скобку**, например:

$$3ax + 6ay = 3a(x + 2y).$$

2) **Способ группировки**, например:

$$\begin{aligned} a^3 - 2a^2 - 2a + 4 &= (a^3 - 2a^2) - (2a - 4) = \\ &= a^2(a - 2) - 2(a - 2) = (a - 2)(a^2 - 2). \end{aligned}$$

3) **Применение формул сокращенного умножения**, например:

$$9x^2 - \frac{1}{16}y^2 = (3x + \frac{1}{4}y)(3x - \frac{1}{4}y);$$

$$27x^3 + 8y^6 = (3x + 2y^2)(9x^2 - 6xy^2 + 4y^4);$$

$$z^2 - 14z + 49 = (z - 7)^2.$$

Разложение квадратного трехчлена на множители — представление его в виде $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, например:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2).$$

14. Алгебраическая дробь — дробь, числитель и знаменатель которой — алгебраические выражения.

Примеры алгебраических дробей: $\frac{a^2+b}{c}$, $\frac{3x-2y}{a+1}$. Предполагается, что буквы, употребляемые в записи алгебраической дроби, могут принимать только такие значения, при которых знаменатель этой дроби не равен нулю.

Основное свойство дроби: при умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же алгебраическое выражение получается равная ей дробь, например:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}.$$

Используя основное свойство дроби, можно сокращать алгебраическую дробь на общий множитель числителя и знаменателя, например:

$$\frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Сложение и вычитание алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для числовых дробей.

Для нахождения алгебраической суммы двух или нескольких дробей эти дроби приводят к общему знаменателю и используют правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

Например, общий знаменатель дробей $\frac{1}{a^2b}$ и $\frac{1}{ab^2}$ равен a^2b^2 , поэтому $\frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2} = \frac{b}{a^2b^2} + \frac{a}{a^2b^2} = \frac{b+a}{a^2b^2}$.

Умножение и деление алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для числовых дробей, на-

пример: $\frac{2a}{3b} \cdot \frac{b^2}{4a} = \frac{2ab^2}{3b \cdot 4a} = \frac{1}{6}b$, $\frac{x^2 - y^2}{2xy} : \frac{x+y}{4x} = \frac{(x^2 - y^2) \cdot 4x}{2xy(x+y)} = \frac{2(x-y)}{y}$.

15. Тождество — равенство, справедливое при любых допустимых значениях входящих в него букв. Например, тождествами являются равенства:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad \sqrt{a^2} = |a|; \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \frac{a^2 - 1}{a - 1} = a + 1.$$

Степени и корни

16. Степень числа a с натуральным показателем n , большим 1, — произведение n множителей, равных a , т. е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Например, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $m^5 = \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m}_{5 \text{ раз}}.$

В записи степени a^n число a — **основание степени**, n — **показатель степени**. Например, в записи степени 2^3 число 2 — основание степени, число 3 — показатель степени.

Первая степень числа — само число: $a^1 = a$. Например,

$$3^1 = 3, \quad \left(\frac{1}{13}\right)^1 = \frac{1}{13}.$$

Действие возведения в степень — нахождение степени числа.

Основные свойства степени:

1) При умножении степеней с равными основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m};$$

2) при делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней вычитаются:

$$a^n : a^m = a^{n-m};$$

3) при возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются:

$$(a^n)^m = a^{nm};$$

4) при возведении произведения в степень в эту степень возводится каждый множитель:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n;$$

5) при возведении дроби в степень в эту степень возводятся числитель и знаменатель:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

17. Квадратный корень из числа a — такое число, квадрат которого равен a . Например, 6 — квадратный корень из числа 36; число -6 также квадратный корень из числа 36.

Извлечение квадратного корня — действие нахождения квадратного корня. Извлечь квадратный корень можно только из неотрицательного числа.

Арифметический квадратный корень из числа a — неотрицательное число, квадрат которого равен a . Это число обозначается так: $\sqrt{a}$. Например, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{144} = 12$.

Выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл только для $a \geq 0$, при этом

$$\sqrt{a} \geq 0, \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

Свойства квадратных корней:

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, если $a \geq 0, b \geq 0$. Например,

$$\sqrt{28224} = \sqrt{144 \cdot 196} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{196} = 12 \cdot 14 = 168.$$

2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, если $a \geq 0, b > 0$. Например, $\sqrt{\frac{169}{225}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{225}} = \frac{13}{15}$.

3) $\sqrt{a^{2n}} = a^n$, если $a \geq 0, n$ — натуральное число. Например, $\sqrt{3^6} = 3^3 = 27$.

Эти свойства используются при преобразовании выражений, содержащих квадратные корни. Основные из этих преобразований — **вынесение множителя из-под знака корня:**

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}, \text{ если } a \geq 0, b \geq 0;$$

и внесение множителя под знак корня:

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, \text{ если } a \geq 0, b \geq 0.$$

Уравнения

18. Уравнение с одним неизвестным — равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Пример уравнения: $2x + 3 = 3x + 2$, где x — неизвестное число, которое нужно найти.

Корень уравнения — значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство. Например, число 3 — корень уравнения $x + 1 = 7 - x$, так как $3 + 1 = 7 - 3$.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Основные свойства уравнений.

1) Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

2) Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

19. Квадратное уравнение — уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a , b и c — заданные числа, причем $a \neq 0$, x — неизвестное число.

Коэффициенты квадратного уравнения называют так: a — первый или старший коэффициент, b — второй коэффициент, c — свободный член.

Примеры квадратных уравнений: $2x^2 - x - 1 = 0$, $3x^2 + 7x = 0$.

Неполное квадратное уравнение — квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, у которого хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Примеры неполных квадратных уравнений: $x^2 = 0$, $5x^2 + 4 = 0$, $8x^2 + x = 0$.

Формула корней квадратного уравнения: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Например, квадратное уравнение $3x^2 + 5x - 2 = 0$ имеет два корня: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}$, т. е. $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -2$.

Приведенное квадратное уравнение — уравнение вида $x^2 + px + q = 0$.

Формула корней приведенного квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Например, корни уравнения $x^2 - 6x - 7 = 0$ таковы:

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 + 7} = 3 \pm 4, \text{ т. е. } x_1 = 7, x_2 = -1.$$

Теорема Виета. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену.

Таким образом, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Теорема, обратная теореме Виета. Если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

20. Система двух уравнений с двумя неизвестными — два уравнения с двумя неизвестными x и y , рассматриваемые совместно.

Пример системы уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 2x + y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 7, \\ x^2 - 4y^2 = -35. \end{cases}$$

Решение системы — пара чисел x, y , которые при подстановке в эту систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство.

Например, решением системы $\begin{cases} 4x - y = 2, \\ 5x + y = 7 \end{cases}$ является пара чисел $x = 1, y = 2$.

Решить систему — это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

При решении систем уравнений применяются следующие *способы*:

1) **Способ подстановки.** Из какого-нибудь уравнения одно из неизвестных выражают через другое и подставляют в другое уравнение системы.

2) **Способ алгебраического сложения.** Уравняя модули коэффициентов при одном из неизвестных системы $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ почленным сложением или вычитанием уравнений системы исключают это неизвестное.

3) Графический способ.

Строят графики уравнений системы и находят координаты точки их пересечения.

Неравенства

21. Числовые неравенства.

Неравенство $a > b$ означает, что разность $a - b$ положительна.

Неравенство $a < b$ означает, что разность $a - b$ отрицательна.

Если $a > b$, то $b < a$.

Неравенство — два числовых или алгебраических выражения, соединенные знаком $>$ или $<$.

Примеры неравенств: $4 > 7 - 5$; $2a + b < a^2 + b^2$.

Для любых двух чисел a и b только одно из следующих трех соотношений является верным: $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Основные свойства числовых неравенств:

1) Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

2) Если прибавить к обеим частям неравенства или вычесть из них одно и то же число, то знак неравенства не изменится: если $a > b$, то $a + c > b + c$ и $a - c > b - c$ для любого c .

Любое число можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак переносимого числа на противоположный.

3) Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, тогда, если это число положительно, то знак неравенства не меняется, а если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный: если $a > b$, то

$$ac > bc \text{ и } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}, \text{ если } c > 0,$$

$$ac < bc \text{ и } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}, \text{ если } c < 0.$$

Сложение неравенств. Неравенства одинакового знака можно складывать, при этом получается неравенство того же знака: если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Например:

$$\begin{array}{rcl} 4 > 3,5 & & 2,3 < 3,5 \\ + - 2 > - 5 & & + - 4 < - 3 \\ \hline 2 > - 1,5 & & - 1,7 < 0,5 \end{array}.$$

Умножение неравенств. Неравенства одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, можно перемножать, при этом получается неравенство того же знака: если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.

Например,

$$\begin{array}{r} 2,4 > 2,1 \\ \times \quad 4 > 3 \\ \hline 9,6 > 6,3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1,7 < 2,3 \\ \times \quad 2 < 3 \\ \hline 3,4 < 6,9 \end{array}.$$

Если $a > b$ и a, b — положительные числа, то $a^2 > b^2$, $a^3 > b^3$ и вообще при любом натуральном n выполняется неравенство $a^n > b^n$. Например, $6^2 > 5^2$, $6^3 > 5^3$, $6^{12} > 5^{12}$.

Строгие неравенства — неравенства со знаками $>$ (больше) и $<$ (меньше). Например, $5 > 3$, $x < 1$.

Нестрогие неравенства — неравенства со знаками $\geq$ (больше или равно) и $\leq$ (меньше или равно). Например, $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $x \leq 3$.

Нестрогое неравенство $a \geq b$ означает, что $a > b$ или $a = b$.

Свойства нестрогих неравенств такие же, как и свойства строгих неравенств. При этом в свойствах строгих неравенств *противоположными* считаются знаки $>$ и $<$, а в свойствах нестрогих неравенств — знаки $\geq$ и $\leq$.

Среднее арифметическое двух чисел a и b — число $\frac{a+b}{2}$.

Среднее геометрическое двух положительных чисел a и b — число $\sqrt{ab}$. Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

22. Неравенство с одним неизвестным — это неравенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Примеры неравенств первой степени с одним неизвестным:

$$3x + 4 < 5x - 2; \quad \frac{1}{3}x - 1 \geq \frac{3-x}{4}.$$

Решение неравенства с одним неизвестным — значение неизвестного, при котором данное неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Например, число 3 является решением неравенства $x + 1 > 2 - x$, так как $3 + 1 > 2 - 3$.

Решить неравенство — это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

Основные свойства неравенств с одним неизвестным.

1) Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив его знак на противоположный, при этом знак неравенства не меняется.

2) Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю: если это число положительно, то знак неравенства не меняется, а если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный.

Система неравенств с одним неизвестным — это несколько неравенств, содержащих одно и то же неизвестное число и рассматриваемых совместно.

Решение системы неравенств — то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Решить систему неравенств — это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

Функции и графики

23. Ф у н к ц и я . Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число y , то говорят, что на этом множестве задана функция $y(x)$. При этом x называют **независимой переменной** (или **аргументом**), а y — **зависимой переменной** (или **функцией**).

Область определения функции — множество всех значений, которые может принимать ее аргумент.

Если функция задана формулой, то считают, что ее область определения — множество значений аргумента, при которых эта формула имеет смысл. Например, функция $y = \sqrt{x - 2}$ определена при $x \geq 2$.

Функция $y(x)$ называется **возрастающей** на промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. для любых x_1, x_2 , принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_2 > x_1$, следует неравенство $y(x_2) > y(x_1)$. Например, функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой; функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $x \geq 0$.

Функция $y(x)$ называется **убывающей** на промежутке, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функ-

ции, т. е. для любых x_1, x_2 , принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $y(x_2) < y(x_1)$. Например, функция $y = -2x$ убывает на всей числовой оси; функция $y = x^2$ убывает на промежутке $x \leq 0$; функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на промежутках $x < 0$ и $x > 0$.

График функции $y(x)$ — множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; y(x))$.

Четная функция — функция $y(x)$, обладающая свойством $y(-x) = y(x)$ для любого x из области ее определения. Например, функция $y = x^4$ — четная функция.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция — функция $y(x)$, обладающая свойством $y(-x) = -y(x)$ для любого x из области ее определения. Например, $y = x^3$ — нечетная функция.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

24. Линейная функция — функция вида $y = kx + b$, где k и b — данные числа.

График линейной функции $y = kx + b$ — прямая. При $b = 0$ функция принимает вид $y = kx$, ее график проходит через начало координат.

25. Прямая пропорциональная зависимость — зависимость, выражаемая формулой $y = kx$, где $k > 0, x > 0$.

Обратная пропорциональная зависимость — зависимость, выражаемая формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0, x > 0, k$ — коэффициент пропорциональности.

26. Функция $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) определена при $x \neq 0$, принимает все действительные значения, кроме нуля.

Если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ (например, $y = \frac{2}{x}, y = \frac{1}{2x}$):

а) принимает положительные значения при $x > 0$ и отрицательные при $x < 0$;

б) убывает на промежутках $x < 0$ и $x > 0$.

Если $k < 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ (например, $y = -\frac{1}{x}, y = -\frac{2}{x}, y = -\frac{1}{3x}$):

а) принимает положительные значения при $x < 0$ и отрицательные при $x > 0$;

б) возрастает на промежутках $x < 0$ и $x > 0$.

ОТВЕТЫ

2. 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; 4) нет таких действительных значений x , при которых значение данной функции равно -5 . 3. 2) $x_1 = 1\frac{3}{4}$, $x_2 = -1$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$.
4. 2) 0; 4) 1. 5. 2) Нулей нет; 4) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; 6) нулей нет; 8) $x = 1$. 6. 2) $p = 3$, $q = -4$; 4) $p = -2$, $q = -15$. 7. $x_{1,2} = \pm 2$. 9. В и С. 12. 2) $(\sqrt{5}; 5)$, $(-\sqrt{5}; 5)$; 4) $(0; 0)$, $(2; 4)$; 6) $(1; 1)$. 13. 2) Да. 14. 2) Да; 4) нет; 16. 1) $x < -3$, $x > 3$; 2) $-5 \leq x \leq 5$; 3) $x \leq -4$, $x \geq 4$; 4) $-6 < x < 6$. 20. 2) $(-3; -4,5)$, $(2; -2)$. 21. 2) Да; 4) нет. 22. 1) Возрастающая; 2) возрастающая; 3) убывающая; 4) не является ни возрастающей, ни убывающей. 23. 3 м/с². 26. 2) $(0; 5)$; 4) $(\frac{1}{8}; \frac{1}{16})$; 6) $(0,5; 0)$.
27. 2) $x = -2$; 4) $x = 2$; 6) $x = \frac{3}{4}$. 28. 2) Нет; 4) нет. 29. 2) $(1; 0)$, $(0,5; 0)$, $(0; -1)$; 4) $(0; 0)$, $(\frac{4}{3}; 0)$. 30. $y = x^2 - 2x + 3$. 32. 2) $k = -10$. 34. 1) $y = 2(x - 3)^2$; 2) $y = 2x^2 + 4$; 3) $y = 2(x + 2)^2 - 1$; 4) $y = 2(x - 1,5)^2 + 3,5$. 35. 2) $(\frac{3}{2}; \frac{11}{4})$; 4) $(\frac{5}{2}; \frac{21}{4})$. 36. 2) $(1; 0)$, $(-5; 0)$, $(0; 10)$; 4) $(0; 14)$. 40. 7,5+7,5. 41. 5 и 5.
42. Сторона, параллельная стене, 6 м; другие стороны по 3 м. 43. Нет. 44. 2) При $x = 1$ значение $y = -5$ — наименьшее значение; 4) при $x = 1$ значение $y = -2$ — наименьшее значение. 45. 1) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$; 2) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$. 46. 1) через 5 сек. наибольшая высота равна 130 м; 2) $(5 + \sqrt{26})$ с.
47. 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 0,5$; 4) ни при каких действительных x не пересекаются. 48. 2) $(1; 1)$, $(2; 4)$; 4) $(-5; 18)$. 49. 2) $x < -6$, $x > 6$. 50. 2) $(5; 0)$, $(-2; 0)$, $(0; 10)$; 4) $(1; 0)$, $(-\frac{11}{7}; 0)$, $(0; -1)$. 51. 2) $(-1; 4)$; 4) $(-\frac{1}{2}; 1)$; 6) $(-\frac{1}{2}; -6\frac{1}{4})$.
53. 2) Наибольшее значение равно 4; 4) наименьшее значение равно $3\frac{2}{3}$. 54. 150 м и 150 м. 55. 200 м и 400 м. 56. 2) $p = 1$, $q = 0$. 57. 2) $p = -4$, $q = 3$. 58. 1) $x_1 = 2$, $x_2 = -5$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. 59. 1) $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$; 2) $a = 1$, $b = -2$, $c = 4$; 2) $a = -2$, $b = 8$, $c = -6$. 61. 2) $3x^2 - x - 1 > 0$; 4) $2x^2 + x - 5 < 0$. 63. 2) $3 < x < 11$; 4) $x < -7$, $x > -1$. 64. 4) $x < -3$, $x > 3$; 4) $x < 0$, $x > 2$. 65. 2) $-2 < x < 1$; 2) $x < -3$, $x > 1$; 6) $x < -7$, $x > \frac{1}{3}$.

66. 2) $x = \frac{1}{6}$; 4) $x < -4, x > 2$. 69. Положительные значения на промежутках $x < -3, x > 2$, отрицательные значения на интервале $-3 < x < 2$. 71. 2) $x \leq -1, x \geq 4$; 4) $-1 < x < 4$. 72. 2) $x < -\frac{1}{8}, x > 2$; 4) $x \leq -0,25; x \geq 1$. 73. 2) $x = 7$; 4) решений нет; 6) x — любое действительное число. 74. 2) Решений нет; 4) решений нет; 6) x — любое действительное число. 75. 2) $x < -\sqrt{7}, x > \sqrt{7}$; 4) $x < -2, x > 0$; 6) $x < -5, x > 3$; 8) $-2 < x < 1$. 77. 2) $x < -\frac{5}{3}, x > \frac{5}{3}$; 4) $-1 < x < 4$; 6) x — любое действительное число; 8) $x = -3$. 78. 2) x — любое действительное число; 4) $x \neq \frac{1}{4}$; 6) $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$; 8) решений нет. 79. 2) Решений нет; 4) $-0,5 < x < 3$; 6) x — любое действительное число. 80. 2) $x = 1$; 4) x — любое действительное число. 82. $-6 < r < 2$. 84. 2) $-5 < x < 8$; 4) $x < -5, x > 3\frac{1}{2}$. 85. 2) $x < 0, x > 9$; 4) $-3 < x < 0$; 6) $x < -1, x > 3$. 86. 2) $-\frac{1}{2} < x < 0, x > \frac{1}{2}$; 4) $-2 < x < 2, x > 5$. 87. 2) $-7 < x < 7$; 4) $-4 < x < 4, x > 4$; 6) $x = -2; 2 \leq x \leq 5$. 88. 2) $-3 < x < 4$; 2) $-3,5 \leq x < 7$; 6) $-2 \leq x < -1, x \geq 3$. 89. 2) $x < 0,5, x > 1$; 4) $x < -\frac{2}{3}, 0 < x < \frac{1}{2}, x > \frac{2}{3}$. 90. 2) $-4 < x < -2, x > 3$; 4) $-3 \leq x \leq -1, 4 \leq x \leq 5$. 91. 2) $x < -2, 2 < x < 6$; 2) $x < -3, -1 \leq x < 2, x \geq 4$. 92. 2) $-\sqrt{15} < x < -3, 0 < x < \sqrt{15}$. 93. 1) $-8 < x < -1$; 2) $x < -5, x > 2$; 3) $-1 < x \leq -\frac{2}{5}$; 4) $x < -4, -4 < x < \frac{3}{2}, x > 4$. 94. 2) $x < 2, x > 4$; 4) $x < 3, x > 4$. 95. 2) $x < -6, x > 6$; 4) $-\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$. 96. 2) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$; 4) $x \leq 0$. 98. 2) $x \neq -5$; 4) $x \neq -\frac{3}{2}$; 6) $x \neq \frac{1}{2}$. 99. 2) Решений нет; 4) решений нет; 6) решений нет. 100. 2) $x < -1, 1 < x < 4$; 4) $x < -\frac{1}{2}, 4 < x \leq 7$; 6) $x < -\frac{1}{2}, 1 < x < 2$. 101. 2) $-1 < x < 5$; 4) $-5 \leq x \leq 2$; 6) $x \leq -\frac{1}{3}, x \geq \frac{1}{3}$. 102. 2) x — любое действительное число; 4) решений нет; 6) $\frac{1}{2} < x < 1$; 8) x — любое действительное число. 103. 2) $x \leq \frac{1}{2}, x \geq 3$; 4) $x = \frac{2}{3}$; 6) решений нет. 104. 2) $x < -\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \sqrt{3}$; 4) $x < -4, -1 < x \leq 1, x > 1$. 105. 2) $-1 < x < -\frac{1}{5}, \frac{3}{4} < x < 2$; 4) $-\frac{1}{3} < x \leq -\frac{1}{5}, -1 < x \leq 2$. 106. Не меньше 12 км/ч. 108. 2) $x \leq -3, -2 < x < 1, x \geq 3$; 2) $-3 < x < 2, -1 \leq x \leq 1$; 3) $-\sqrt{2} < x < -1, 1 < x < \sqrt{2}$; 4) $x < -2, -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, x > 2$. 109. 2) 32; 4) 0. 110. 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^5$; 4) $\left(\frac{c}{d}\right)^2$. 112. 2) 21^{-3} ; 4) a^{-9} . 113. 2) $\frac{121}{81}$; 4) 32; 6) $-\frac{1}{169}$.

114. 2) $\frac{53}{16}$; 4) -875 . 116. 2) $\frac{1}{(x+y)^8}$; 4) $\frac{9a^3}{b^4}$; 6) $\frac{a^2}{bc^4}$. 117. 2) -125 ; 4) $\frac{1}{17}$.
118. 2) $0,0016$; 4) $\frac{16}{625}$. 119. 2) b^8 ; 4) b^{-28} . 120. 2) a^8b^{-4} ; 4) $3^{-4}a^{-12}$. 121. 2) $m^{12}n^{-15}$;
4) $-64x^{-15}y^3z^{-9}$. 122. 2) $\frac{97}{9}$. 123. 2) $2,7 \cdot 10^{-11}$; 4) $1,25 \cdot 10^8$. 124. 2) $5,086 \cdot 10^{-6}$;
4) $1,6 \cdot 10^{-3}$. 125. $0,003$. 126. 10^{-11} . 127. $0,0001$ мм. 128. 2) a^5 , $\frac{1}{32}$. 129. 2) 0 .
130. 2) $b - a$. 132. 2) 2 ; 4) 15 . 133. 2) 81 ; 4) $\frac{1}{81}$. 134. 2) -1 ; 4) -4 ; 6) -8 .
135. 2) $x = -\frac{1}{2}$; 4) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. 136. 2) x — любое число; 4) $\frac{2}{3} \leq x < 2$.
137. 2) 5 ; 4) -11 ; 6) $\frac{1}{30}$. 138. 2) 2 ; 4) $4\sqrt{6}$. 139. 1) $x-2$; 2) $(3-x)^3$ при
 $x \leq 3$, $(x-3)^3$ при $x > 3$. 140. 3974 . 141. 2) $36\sqrt[3]{4}$; 4) 20 . 142. 2) 33 ; 4) 7 .
143. 2) $0,2$; 4) 2 . 144. 2) 50 ; 4) 16 . 145. 2) a^2b^3 ; 4) a^2b^3 . 146. 2) $3ab$; 4) $\frac{2}{b}$.
147. 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$. 148. 2) $\frac{2}{5}$; 4) 2 ; 6) 4 . 149. 2) $3x$; 4) $2\frac{b}{a}$. 150. 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{4}$.
151. 2) $4\sqrt{2}$; 4) 5 . 152. 2) y^2 ; 4) a^8b^9 ; 6) $3a$. 153. 2) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$; 6) 4 . 154. 2) $\frac{2a^2}{b}$;
4) $\frac{a}{b}$; 6) a^2b . 155. 2) 6 ; 4) $\frac{1}{2}$; 6) 4 . 156. 2) ab^2c ; 4) $2xy$. 157. 2) $3x$; 4) 0 . 158. 2) 7 ;
4) 1 . 162. 2) 3 ; 4) 27 ; 6) $\frac{1}{27}$. 163. 2) 5 ; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. 164. 2) 49 ; 4) 125 .
165. 2) 121 ; 4) 150 . 166. 2) 3 ; 4) $2,7$. 167. 2) b ; 4) a ; 6) 1 . 168. 2) a^2b .
169. 2) 1 . 170. 2) 3 . 171. 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 4) $a+b$; 6) $a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}$; 8) $\sqrt{c} - 1$. 172. 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}$;
4) $2\sqrt{b}$. 173. 2) $2y$; 4) $2\sqrt[3]{b}$. 174. 2) $2\sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$. 176. 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{1}{4}} < (0,41)^{\frac{1}{4}}$;
4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}} > \left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$. 177. 2) $x = 3$; 4) $x = 2$; 6) $x = \frac{1}{2}$. 178. $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5}\right)^3} > \sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6} - 1\frac{1}{7}\right)^3}$.
179. 2) $x = \frac{5}{2}$; 4) $y = 5$. 180. 2) $x = 2,6$; 4) $x = 4$. 181. 2) $x = -\frac{1}{8}$; 4) $x = 1$.
182. 2) 6 ; 4) -3 . 183. 2) -3 ; 4) $\frac{25}{16}$. 184. 2) 51 ; 4) $0,04$; 6) $-0,1$. 185. 2) 1000 .

186. 2) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$. 187. 2) $x = -1$; 4) $x = 1$. 188. 2) $\frac{95}{16}$; 4) $-609\frac{8}{27}$. 189. 2) x — любое число; 4) $x \leq 2, x \geq 3$; 6) $0 \leq x \leq 2, x \geq 3$. 190. 2) $a+1$; 4) $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$; 6) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$. 191. 2) $y = 1$ при $x = 2$; $y = 5$ при $x = 0$ и $x = 4$; $y = 10$ при $x = -1$ и $x = 5$; $y = 17$ при $x = -2$ и $x = 6$. 192. 1) $y(-2) = -1, y(0) = -5, y(\frac{1}{2}) = -11, y(3) = 4$; 2) $y = -3$ при $x = -\frac{1}{2}$; $y = -2$ при $x = -1$; $y = 13$ при $x = \frac{3}{2}$; $y = 19$ при $x = \frac{4}{3}$. 194. 2) $x \leq 2, x \geq 5$; 4) $-2 \leq x < 3$. 195. 1) $y(-3) = 3, y(-1) = 1, y(1) = -1, y(3) = -1$; 2) $y = -2$ при $x = 2$; $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 4$; $y = 2$ при $x = -2$ и $x = 6$; $y = 4$ при $x = -4$ и $x = 8$. 196. 3) $x \neq -1$; 4) $-1 \leq x \leq 1, x \geq 4$; 5) $-5 \leq x \leq 1, x > 2$; 6) $x \geq 0$. 197. 2) Да; 4) да. 203. 2) $x = 16$; 4) $x = \frac{1}{16}$; 6) $x = \frac{1}{243}$. 205. 2) $x = 32$; 4) $x = 8$. 208. 2) Нечетная; 4) не является ни четной, ни нечетной. 209. 2) Нечетная; 4) нечетная; 6) не является ни четной, ни нечетной. 218. 2) $x = 0$. 219. 2) $(-1; 0)$. 220. 2) $y = \frac{1}{2}$ при $x = -4$; 4) $y \leq 1$ при $x < 0$ и $x \geq 2$. 222. 2) $(-2; 4)$ и $(2; -4)$; 4) $(-4; -2)$ и $(1; 3)$. 228. 2) $x \leq 3$; 4) $y < 5$; 6) $x < -5, x > 5$. 229. Ребро куба больше 7 дм. 232. 2) $x = 10$; 4) $x = 5$. 233. 2) $x = 2$; 4) $x = 2; x = -7$. 234. 2) $x = 4$; 4) $x = 0, 2$. 235. $x = \frac{7}{3}$. 236. 2) $x > -3$; 4) $x < 2$; 6) $x < 1, x > 7$. 238. 2) $x = -2$; 4) $x_1 = 1; x_2 = 3$. 239. 2) $x = 2, 25$. 240. 2) $x = 1$; 4) $x = 5$. 241. 2) $x = 4$. 242. 2) $2 \leq x \leq 3$; 4) $1 < x \leq 2$; 6) $x \geq 1$. 243. 2) $x \neq \frac{3}{2}$; 4) x — любое число. 248. 2) $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}), (\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2})$; 4) $(-1; -1); (1; 1)$. 249. 2) $x > 2$; 4) $x \leq -2$. 250. 2) $x = 16$; 4) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$; 6) $x = -1$. 251. 2) x — любое число; 4) $2 \leq x \leq 11$; 6) $x < -7, -3 \leq x < -1, x \geq 3$. 252. 2) Убывает; 4) убывает. 253. 2) Нечетная; 4) не является ни четной, ни нечетной. 255. 2) $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$. 256. 2) $x_1 = -1, x_2 = 7$; 4) $x = 81$; 6) $x_1 = 3, x_2 = 7$. 257. 1) $x < -1, x > 9$; 2) $-1 < x \leq 0, 3 \leq x < 4$; 3) $\frac{2}{3} < x < 6$; 4) $x \geq 4$. 258. 2) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{8\pi}{45}$; 8) $\frac{7\pi}{9}$. 259. 2) 20° ; 4) 135° ; 6) $(\frac{720}{\pi})^\circ$; 8) $(\frac{324}{5\pi})^\circ$. 260. 2) 4,71; 4) 2,09. 261. 2) $2\pi < 6,7$; 4) $\frac{3\pi}{2} < 4,8$; 6) $-\frac{3\pi}{2} < -\sqrt{10}$. 263. 0,4 м. 264. 2 рад. 265. $\frac{3\pi}{8}$ см². 266. 2 рад. 267. 2) $(-1; 0)$; 4) $(0; -1)$; 6) $(1; 0)$. 269. 2) Вторая; 4) четвертая; 6) вторая. 270. 2) $(0; 1)$; 4) $(-1; 0)$; 6) $(0; 1)$. 271. 2) $2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 272. 2) Вторая; 4) четвертая. 273. 2) $x=1, 8\pi$, $k=4$; 4) $x=\frac{4}{3}\pi$, $k=3$; 6) $x=\frac{5}{3}\pi$, $k=2$. 275. 2) (0; 1); 4) (0; -1). 276. 2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 277. 2) $-\frac{1}{2}$; 4) -1; 6) -1; 8) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
 279. 2) -1; 4) -1; 6) 1. 280. 2) 0; 4) -1. 281. 2) $\frac{-\sqrt{2}-9}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}$.
 282. 2) $x=\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x=\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 284. 2) $-\frac{5}{4}$;
 4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. 285. 2) $x=\pi + 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x=\pi + 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$;
 6) $x=\frac{2}{3}k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 286. 2) $x=2\pi k - 1$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x=k\pi - 1$,
 $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 6) $x=\frac{2\pi k}{3} + 1$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 287. 2) Вторая; 4) вторая; 6) вто-
 рая. 288. 2) Плюс; 4) плюс; 6) плюс. 289. 2) Минус; 4) плюс; 6) минус.
 290. 2) Плюс, плюс; 4) минус, минус; 6) минус, минус; 8) плюс, плюс.
 291. 2) $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$, $\operatorname{ctg} \alpha < 0$; 4) $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $\operatorname{ctg} \alpha > 0$.
 292. 2) $\sin 3 > 0$, $\cos 3 < 0$, $\operatorname{tg} 3 < 0$; 4) $\sin(-1,3) < 0$, $\cos(-1,3) > 0$, $\operatorname{tg}(-1,3) < 0$.
 293. 2) Минус; 4) плюс; 6) плюс; 8) минус. 294. Знаки чисел $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ совпа-
 дают, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ или $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; числа $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ имеют противо-
 положные знаки, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ или $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. 295. 2) Минус; 4) плюс.
 296. 2) $\cos 1,3 > \cos 2,3$. 297. 2) $x=\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x=\pi + 2k\pi$, $k=0, \pm 1$,
 $\pm 2, \dots$ 298. 2) Во второй. 299. $\frac{h \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$. 300. 2) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$;
 4) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$; 6) $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.
 301. 2) Могут; 4) не могут. 302. 2) Не могут. 303. $\cos \alpha = \frac{9}{11}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{9}$.
 304. $\frac{1}{3}$. 305. $\cos \alpha = \pm \frac{3}{4}$. 306. 2) $\sin \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$. 307. 2) $\frac{1}{3}$; 4) 2. 308. 1) $-\frac{3}{8}$;
 2) $\frac{11}{16}$. 309. 1) $x=\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 2) $x=-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 3) $x=2\pi k$,
 $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x=\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 311. 2) 0; 4) $1 + \sin \alpha$. 312. 2) 3;
 4) 4. 316. 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. 317. $\frac{8}{25}$. 318. $\frac{37}{125}$. 319. 1) $x=\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$;
 2) $x=\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 320. 2) $\frac{1}{3}$; 4) -3. 321. 2) $2\cos \alpha$; 4) 2. 323. 2) 2.
 324. 2) $-2\cos \alpha$. 325. 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. 326. 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1. 327. 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$. 328. 2) $\cos 3\beta$;
 4) -1. 329. $-\sin \alpha \cdot \sin \beta$. 330. 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. 331. 2) $-\frac{2+\sqrt{14}}{6}$. 332. 2) $-\sin \alpha \cdot \cos \beta$;

- 4) $\sin \alpha \cdot \cos \beta$. 333. $\cos(\alpha + \beta) = \frac{84}{85}$; $\cos(\alpha - \beta) = \frac{36}{85}$. 334. $-\frac{63}{65}$. 335. 2) 0;
- 4) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$. 338. 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$. 339. 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1 . 340. 2) $\frac{24}{25}$. 341. 2) $\frac{7}{25}$.
342. 2) $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$; 4) 1. 343. 2) $2 \operatorname{ctg} \alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^2 \alpha$. 345. 2) $\frac{8}{9}$. 347. 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
348. 2) $\cos 6\alpha$; 4) $\frac{1}{2 \sin \alpha}$. 350. $\frac{15}{8}$. 351. 2) $\sqrt{3}$. 352. 2) 0; 4) 0; 6) -1 . 353. 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 354. 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 355. 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\sqrt{3}$. 356. 2) $-\sqrt{2}$;
- 4) -1 . 357. 2) $\cos 2\alpha$. 358. 2) $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{5-3\sqrt{3}}{4}$. 359. 2) 1; 4) $-\frac{1}{\cos \alpha}$.
362. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x = \pi + 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 363. 2) $\sqrt{2} \sin \beta$;
- 4) $\sin 2\alpha$. 364. 2) 0; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 365. 2) $4 \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)$;
- 4) $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$. 367. 2) $2 \sin \alpha$. 370. 2) $2\sqrt{3} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{\pi}{8}$. 371. 2) 0.
372. 2) $2 \cos \alpha (\cos \alpha - 1)$; 4) $(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)$. 373. 2) Третья;
- 4) вторая; 6) вторая. 374. 2) 0; 1; 4) 1; 0; 6) 0; -1 . 375. 2) 2; 4) -1 . 376. 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$;
- 4) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 378. 2) 3; 4) $\operatorname{tg}^2 \alpha$. 379. 2) $-\frac{1}{3}$. 380. 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. 381. 2) $\sin 2\alpha$;
- 4) $\operatorname{tg} 2\alpha$. 382. 2) 1; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 383. 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. 384. 2) $\cos 0 > \sin 5$.
385. 2) Плюс; 4) плюс. 386. 2) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 387. 2) $\frac{1}{\sin \alpha}$.
388. $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$; $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$.
389. 2) $\operatorname{tg} \alpha$. 390. 2) $\frac{1}{\sin 4\alpha}$; 4) $-\frac{1}{\cos 2\alpha}$. 391. 2) 1; 4) 1. 392. 2) -7 . 393. 2) $\cos 4\alpha$.
395. 2) $-3, -1, 1, 3, 5$. 397. 2) 79; 4) -42 . 398. 2) $a_n = 29 - 4n$; 4) $a_n = 6 - 5n$.
399. 12. 400. Да, $n = 11$. 401. $n = 11$, нет. 402. 2) 0,5. 403. 2) -13 . 404. 2) -100 .
405. 2) $a_n = 5n - 17$. 406. $n \geq 9$. 407. $n < 25$. 408. 2) $a_9 = -57$, $d = 7$; 4) $a_9 = -1$, $d = -15$;
409. 44,1 м. 410. 10 дней. 411. 30. 412. 60. 413. 2) 10050; 4) 2550.
414. 4850. 415. 4489. 416. 2) -192 . 417. 2) 204. 418. 2) 240. 419. 4905;
494550. 420. 2) 2900. 421. 10. 422. 2) $a_{10} = 15\frac{5}{6}$, $d = \frac{3}{2}$. 423. 2) $a_1 = -88$, $d = 18$.
424. 78 бревен. 425. 44. 426. $a_1 = 5$, $d = 4$. 429. 2) $-3, 12, -48, 192, -768$.
431. 2) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{81}$. 432. 2) $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. 433. 2) 5; 4) 8.
434. 2) 3; 4) $-\frac{1}{5}$. 435. $b_8 = 2374$, $n = 5$. 436. $b_7 = 3\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 437. $b_6 = 6$, $b_1 = 30\frac{3}{8}$ или $b_6 = -6$, $b_1 = -30\frac{3}{8}$.
438. 65910 сумов. 439. 0,25 см².

440. 2) $-\frac{31}{8}$; 4) $-\frac{275}{81}$; 6) -400 . 441. 2) 2186. 442. 2) $b_1 = -1$, $b_8 = 128$.
 443. 2) $n = 7$; 4) $n = 5$. 444. 2) $n = 9$, $b_9 = 2048$; 4) $n = 4$, $q = 7$. 445. 2) 364; 4) 305.
 446. 2) $b_5 = 4802$, $S_4 = 800$. 447. $-1\frac{31}{32}$. 449. 2) $q = 5$, $b_3 = 300$ или $q = -6$,
 $b_3 = 432$. 450. 2) $q = 2$ или $q = -2$; 4) $S_5 = 781$ или $S_5 = 521$. 452. 2) Да; 4) да.
 453. 2) 7,2; 4) $-8\frac{1}{6}$. 454. 2) $\frac{27}{4}$; 4) $\frac{2}{3}$. 455. 2) Нет; 4) да. 456. $90\frac{10}{11}$.
 457. 2) $6 + 4\sqrt{3}$. 458. 2) $\frac{1}{2}$; 459. 2a. 460. $R_n = \frac{1}{3^{n-1}} \cdot R_1$. 461. 2) 1; 4) $\frac{7}{30}$.
 462. 2) $d = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1\frac{1}{2}$; 4) $d = -3$, $a_4 = \sqrt{2} - 9$, $a_5 = \sqrt{2} - 12$. 464. $-5\frac{1}{3}$.
 465. 2) -1080 . 466. 143. 467. 2) -22 . 468. 2) $q = -\frac{1}{2}$, $b_4 = -\frac{1}{32}$, $b_5 = \frac{1}{64}$;
 4) $q = -\sqrt{2}$, $b_4 = -10\sqrt{2}$, $b_5 = 20$. 469. 2) $b_n = -0,5 \cdot (-2)^{n-1}$. 470. 2) $b_n = \frac{125}{8}$.
 471. 2) $S_{10} = 1\frac{85}{256}$; 4) $S_9 = 5$. 472. 2) 242; 4) $\frac{65}{36}$. 473. $-\frac{4}{5}$. 474. $24\frac{41}{74}$.
 475. 2) 14, 11, 8, 5, 2. 476. $-\frac{5}{2}$. 477. 2) $a_{19} = 0$, $a_1 = -108$. 478. 2) $x_1 = \frac{1}{3}$;
 4) $x_2 = -4$. 480. 14. 481. 2) $a_{16} = -1\frac{2}{3}$, $d = -\frac{2}{15}$. 482. 2) 27. 483. 2) -27 ;
 4) $\pm\frac{1}{25}$. 484. 6. 485. 2) Нет; 4) да. 487. В среду. 488. $a_1 = 8$, $d = -3$ или $a_1 = 2$,
 $d = 3$. 489. $a_1 = 5$, $d = -5$ или $a_1 = -5$, $d = 5$. 490. 180 раз. 495. 2) $-15 < x < -4$;
 4) $x \leq 12$, $x \geq 13$; 496. 2) $0 < x < \sqrt{5}$; 4) $x < -\sqrt{3}$; $x > \sqrt{3}$. 497. 2) $-9 < x$
 < 6 ; 4) $-2 < x < 0,1$; 6) $x \leq \frac{1}{8}$, $x \geq 2$. 498. 2) $x = -12$; 4) x — любое
 действительное число; 6) нет решений. 499. 2) x — любое действительное число;
 4) x — любое действительное число; 6) 2) x — любое действительное число.
 500. 2) $-0,7 < x < \frac{1}{2}$; 2) $-2 \leq x \leq 1$. 501. 2) $x \leq -2$, $x = 1$; 4) $x \leq -\frac{1}{3}$, $0 \leq x \leq 2$.
 502. 2) $-0,5 \leq x < 2$; 4) $-3 < x < 0$, $x > 1$. 503. Высота больше 3,1 см, средняя
 линия больше 6,2 см. 504. Больше 8 с. 505. Больше 5 см. 506. 2) $x < -7$,
 $-1 < x < 2$; 4) $-1 \leq x < -\frac{1}{3}$, $x > \frac{1}{3}$. 507. $p = 5$, $q = -14$. 508. 2) $p = 14$, $q = 49$.
 509. $y = -2x^2 + 11x - 5$. 510. $y = \frac{h}{r^2} x^2$. 511. 2) $a = -1$, $b = -1$, $c = 2$.
 512. Указание. 1) Обозначая $\frac{a}{b} = A^3$, $\frac{b}{c} = B^3$, $\frac{c}{a} = C^3$ и учитывая равенство
 $ABC=1$, запишите данное неравенство в виде $A^3 + B^3 + C^3 \geq 3ABC$, которое
 преобразуйте к виду $(A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC) \geq 0$. Неравенство
 $(A^2 + B^2 + C^2 \geq AB + AC + BC)$ получается сложением неравенств $A^2 + B^2 \geq 2AB$,

$A^2 + C^2 \geq 2AC$, $B^2 + C^2 \geq 2BC$; 2) сложите неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического: $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2c$, $\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a$, $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$; 3) вычтите из левой части неравенства правую и числитель полученной дроби запишите в виде: $(a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (a+c)(a-c)^2$.

515. 1) $x_{1,2} = \pm 2$; 2) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 3$; 3) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$; 4) $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$;

5) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$; 6) $x_{1,2} = \pm 4$, $x_{3,4} = \pm 6$. **516.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^3}{3y}$. **517.** 2) $3 - \sqrt[3]{2}$;

4) $6\sqrt{7}$. **518.** 2) $(2\sqrt{0,5})^{0,3} < (2\sqrt{0,5})^{0,37}$. **519.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **520.** 2) $5ab\sqrt{b}$;

4) $11ab\sqrt{ab}$. **521.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **522.** 2) $-8\frac{1}{8}$. **523.** 2) $-1\frac{5}{6}$. **524.** 2) $x = \frac{1}{9}$;

4) $x = 0$. **525.** 2) Нет. **526.** 2) Нет. **527.** 2) $1,5 < x \leq 7$; 4) $x \geq -7,5$; 6) $0 \leq x < 2$, $x > 2$. **530.** -1. **531.** 2) Отрицательно. **532.** 2) $-0,8$. **533.** 2) $2\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$;

4) $\sin\alpha(\sin\alpha - 2\cos\alpha)$. **534.** $\sin\alpha = \frac{240}{289}$, $\cos\alpha = -\frac{161}{289}$, $\tan\alpha = -\frac{240}{161}$. **535.** 2) $a_{12} = 47,5$, $S_{12} = 537$; 4) $a_{18} = 11\frac{2}{3}$, $S_{18} = 108$. **536.** 1220. **538.** 2) $b_1 = 5$. **539.** 2) $b_4 = 125$, $S_4 = 156$; 4) $b_5 = 81$, $S_5 = 61$. **540.** $15\frac{3}{4}$. **541.** 2) $4\frac{1}{6}$; 4) 1; 6) $-\frac{5}{4}(1 + \sqrt{5})$.

542. 2) $2ab\sqrt[3]{b}$; 4) $a + 3$. **543.** 2) -1; 4) $-\frac{1}{x}$. **544.** Первое. **545.** 2) $\frac{(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b})}{a^2-b}$;

4) $0,1(5 - \sqrt{5})\sqrt{5 + \sqrt{5}}$. **546.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. **547.** Убывает. **548.** 2) $x \leq 0$, $x \geq 6$; 4) $x \neq \sqrt{3}$; 6) $x \leq -3$, $0 < x < 2$, $x \geq 3$. **550.** 2) $x = 61$; 4) $x = 0,5$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$. **551.** 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 4) 4. **552.** 2) $\cos^2x$. **553.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **556.** $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$. **557.** $39\frac{2}{3}$. **558.** 7, -28, 112, -448 или -11 $\frac{2}{3}$; -46 $\frac{2}{3}$; -186 $\frac{2}{3}$; -746 $\frac{2}{3}$. **559.** $b_1 = 5$, $b_5 = 405$. **560.** $\frac{1}{8}$. **561.** 8, 13, 18 или 20, 13, 6. **562.** 1) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **563.** 1) $1 - \sqrt{a}$; 2) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$.

565. $\sin\alpha = -\frac{120}{169}$, $\cos\alpha = -\frac{119}{169}$. **567.** 10, 4, -2, 1 или $-\frac{5}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{49}{4}$.

Упражнения **для повторения курса алгебры 8–9 классов**

569. 2) 4; 4) $4\frac{3}{4}$. 570. 2) 5,8; 4) $-\frac{1}{11}$. 571. 2) $x = 7$; 4) $x = 0,5$; 6) $x = 2,25$.
572. 2) 3; 4) 0,1125. 573. 2) 300; 4) 3600. 574. 2) 5%; 4) $16\frac{2}{3}\%$. 575. 2) $5a^4b$; 4) $4a^8b^7$. 576. 2) $35 - 2x - 2x^3 - x^5$; 4) $8a^2 + 4b^2 + 36a + 36$. 577. 2) 4,9; 4) 2.
578. 2) $b^2 - 7a^2b^3$. 579. 2) $\left(\frac{b}{3}-1\right)\left(\frac{b}{3}+1\right)$; 4) $(b-\sqrt{3})(b+\sqrt{3})(b^2+3)$. 580. 2) $\left(\frac{b}{2}+1\right)^3$; 4) $(1+9b)^2$. 581. 2) $(a+1)(a-x)$; 4) $(a-x)(5a-7)$. 582. 2) $2a^3b(a-1)^2$; 4) $(a-b)^2(a+b)^2$. 583. 2) $2(x-3)^2$; 4) $(x-1)(x+2)$. 584. 2) $\frac{b+3}{3b}$; 4) $\frac{3y}{4x}$;
- 6) $\frac{x+4}{x+5}$; 8) $\frac{x-1}{x+2}$. 585. 2) $\frac{3}{2}m^2$; 4) $\frac{3c^2}{k^3}$; 6) $\frac{15a}{4c}$; 8) $(x+1)(x-2)$. 586. 2) $\frac{6-5a}{a^2-4}$; 4) $\frac{3b-a^2}{a(b^2-a^2)}$. 587. 2) $\frac{1}{2a+3}$; 4) $b+a-1$. 588. 2) $\frac{2}{a(a+2)}$; 4) $\frac{1}{a+1}$. 589. 3) $\frac{x}{y}$;
- 4) $\frac{10}{2a+1}$. 590. 2) -0,25; 4) $1\frac{9}{16}$. 591. 2) 3. 592. 2) $\frac{1}{x+\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$. 593. 2) 4;
- 4) 8. 594. 2) -2; 4) 0; 6) 7. 595. 2) 2; 4) 14. 596. 2) $\frac{\sqrt{3}}{11}$; 4) $6\sqrt{2}$. 597. 2) $2\cdot 10^{-3}$; 4) $1,2\cdot 10^{-3}$. 598. 2) 1,25. 599. 2) 3,5. 600. 2) $-x^2y^9$; 4) xy^2 . 601. 2) -1;
- 4) $1+\sqrt{m}$. 602. 2) $x = 1$; 4) $x = -0,5$. 603. 2) $x = 12\frac{1}{14}$; 4) $x = -13,5$.
604. 2) $x = 3$; 4) $x = -9$. 605. 2) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$; 4) $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. 606. 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{8}$; 6) $x_{1,2} = \pm 2$; 8) $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$.
607. 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 1,5$. 608. 2) $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{3}{4}$. 609. 2) $x_1 = 1$, $x_2 = 4,5$;
- 4) $x_1 = -5$, $x_2 = 0,5$. 610. 2) $x_1 = -3$, $x_2 = 5$; 4) $x = -1$; 6) $x_1 = 4,3$, $x_2 = -11,7$. 611. 2) $x = 3$; 4) $x = -4$. 612. 2) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 6$. 613. 2) $x = 33$ 4) $x = 9$;
- 6) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. 614. 2) $x = -2$; 4) $x = 1,5$. 615. 2) $x = -1$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = -0,5$; 6) $x = 4$. 616. 2) (3; 7); 4) (2; 3); 6) (-2; -3). 617. 2) (14; 10); 4) (2; 2). 618. 2) (5; 3), (-3; -5); 4) (4; -9), (-9; 4); 6) (4; 5), (-4; -5), (5; 4), (-5; -4).
619. 2) $x \leq \frac{22}{27}$; 4) $x > 1$. 620. 2) $x \leq 1$; 4) $x < 3\frac{1}{8}$; 6) $x < 2$. 621. 2) $x \geq 1,5$;
- 4) $x \geq 3$. 622. 2) 1; 2; 3; 4. 623. 2) -1; 0; 1; 2; 4) -1; 0; 1; 2; 3. 624. -4; -3; -2; -1. 625. 2) $-1 \leq x \leq 3$; 4) $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; 6) решений нет; 8) $x < -1\frac{1}{3}$,
- $x > 1$. 626. 2) $-1\frac{1}{3} < x < 3\frac{1}{3}$; 4) $-1 \leq x \leq 3$. 627. 1) $-4 < x < 2$; 4) $0 < x < 7$,

$x > 8$; 6) $x \leq -3$, $-0,5 \leq x \leq 0,5$. 628. 2) $9 > 4\sqrt{5}$; 4) $5\sqrt{6} < 6\sqrt{5}$; 6) $2\sqrt[3]{3} < \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$. 629. 62,5 и 57,5. 630. 5 км/ч. 631. 4 км/ч. 632. 12,5 км/ч, 2,5 км/ч. 633. 26 см, 2см. 634. 48 мин. 635. 20 мин. 636. 35 ц, 40 ц. 637. 5 ч, 7 ч. 638. 2) Да; (0; -4), (8; 0), $y(-2) = -5$; 4) нет; (0; 6), (4; 0), $y(-2) = 9$. 641. 2) (5; -10); 4) $(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8})$. 642. 2) 23; 4) $6\frac{1}{4}$. 643. 2) $x_1 = -2$, $x_2 = -5$. 645. $\sqrt[3]{-\frac{2}{9}} < \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$. 647. 2) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 648. 2. 650. 2) $2\cos^2\alpha$. 651. $-\operatorname{tg} 2\alpha$. 653. 2) $\frac{7}{9}$. 654. 2) 0,5. 655. 2) $\frac{3}{8}$. 656. 7. 657. 1) 0; 2) 0. 658. $-\sin\alpha - \cos\alpha$. 659. -2. 660. -0,5. 661. 2) $a_1 = 201$, $S_{17} = 2737$. 662. $n = 39$. 663. 682. 664. 2) 0,5; 4) 1. 665. 189. 666. 2) $a_1 = 1$, $d = 3$; 4) $a_1 = 2$, $d = 3$ или $a_1 = 14$, $d = -3$; 671. $b_n = 3\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ или $b_n = -3\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$. 672. $b_4 = 12$, $q = -2$ или $b_4 = -12$, $q = 2$. 673. $\frac{1}{3}$; 1; 3; 9; 27 или $\frac{1}{3}$; -1; 3; -9; 27. 674. 2) $b_1 = 0,384$, $q = 0,25$ или $b_1 = 0,6$, $q = -0,2$. 675. 2) $b_1 = 37,5$, $q = 0,6$ или $b_1 = 48$, $q = 0,25$.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

Глава I. 1. Рис. 84. 2. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. 3. $y > 0$ при $-1 < x < 1$; $y < 0$ при $x < -1$, $x > 1$. 4. Функция возрастает при $x > 0$; функция убывает при $x < 0$. 5. (3; 0); рис. 85.

Глава II. 1. 1) $-1 < x < 4$; 2) x — любое действительное число; 3) решений нет; 4) $x = -10$. 2. $x \geq 1$; $-2 \leq x \leq 0$.

Глава III. 1. 1) $8\frac{3}{8}$; 2) 16. 2. $8,6 \cdot 10^3$; $7,8 \cdot 10^{-3}$; $6,708 \cdot 10^4$; $1,1 \cdot 10^6$. 3. 1) 6; 2) $(y+x)xy$. 4. $a^{\frac{3}{4}}$; 27. 5. $(0,78)^{\frac{2}{3}} > (0,67)^{\frac{2}{3}}$; $(3,09)^{-\frac{1}{3}} < (3,08)^{-\frac{1}{3}}$.

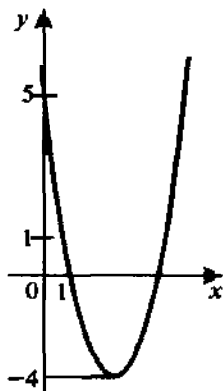


Рис. 84

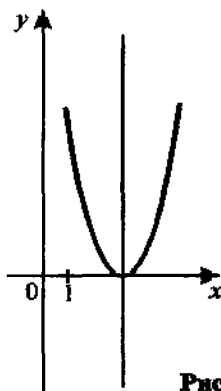


Рис. 85

Глава IV . 1. 1) $x \neq 1$; 2) $-3 \leq x \leq 3$. **2.** а) 1) $y = 1,4$; 2) $y = 3$; 3) $y = -2,5$; 4) $y = 8$; б) 1) $x = 9$; 2) $x = 2$; 3) $x = -\frac{5}{3}$; 4) $x = \sqrt[3]{3}$; в) $y(x) > 0$ при: 1) $x > 0$; 2) $x > 0$; 3) $x < 0$; 4) $x > 0$; $y(x) < 0$ при: 1) нет таких промежутков; 2) $x < 0$; 3) $x > 0$; 4) $x < 0$; г) функция возрастает при: 1) $x \geq 0$; 2) таких промежутков нет; 3) $x > 0$, $x < 0$; 4) $x \in \mathbb{R}$; функция убывает при: 1) таких промежутков нет; 2) $x > 0$, $x < 0$; 3) нет промежутков; 4) нет промежутков. **3.** 1) Четная; 2) нечетная. **4.** 1) $x = 28$; 2) $x = 1$.

Глава V. 1. $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$, $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$. **2.** 1) 1; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** 1) $\sin \alpha \cos \beta$; 2) $\cos^2 \alpha$; 3) $2 \sin \alpha$.

Глава VI. 1. $a_{10} = -25$, $S_{10} = -115$. **2.** $b_6 = \frac{1}{8}$, $S_6 = 7\frac{7}{8}$. **3.** $q = \frac{1}{3}$, $S = 1,5$.

Ответы к тестовым заданиям

Глава I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E

Глава II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E

Глава III

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E

Глава IV

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E

Глава V

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D

Глава VI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аргумент 76
Арифметический корень n -й степени 53
Вершина параболы 8
Гипербола 90
График функции 11
Единичная окружность 109
Квадратичная функция 5, 16
Квадратное неравенство 29
Квадратный корень 53
Корень 5
Кубический корень 53
Метод интервалов 38
Нули квадратичной функции 6
Область определения 76
Ось симметрии параболы 8
Парабола 7
Поворот 109
Прогрессия
— арифметическая 157
— разность 158
— сумма n первых членов 162
— геометрическая 166
— знаменатель 167
— бесконечно убывающая 176
Степень
— с иррациональным показателем 81
— с нулевым показателем 48
— с отрицательным показателем 48
Сумма и разность косинусов 146
Сумма и разность синусов 146
Тождество 128
— тригонометрическое 124
Угла:
— косинус 115
— синус 115
— радианная мера 106
— тангенс 117
Фокус параболы 9
Формулы приведения 141
Функция 76
— периодическая 143
— степенная 76
— четная 85
— убывающая 82
— нечетная 87
— тригонометрическая 119
— возрастающая 82

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абу Райхан Беруни 75, 104, 124, 155, 156, 186
Абул Вафа аль Бузджани 155
Аль Каши 52, 75, 150, 186
Лейбниц Г. В. 104
Мирза Улугбек 156
Ньютон И. 75
Эйлер Л. (1707–1783) 75

ОГЛАВЛЕНИЕ

Повторение курса алгебры 7–8 классов	3
--	---

Глава I. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 1. Определение квадратичной функции	5
§ 2. Функция $y = x^2$	7
§ 3. Функция $y = ax^2$	10
§ 4. Функция $y = ax^2 + bx + c$	14
§ 5. Построение графика квадратичной функции	18
Упражнения к главе I	24
Тестовые задания к главе I	26

Глава II. КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

§ 6. Квадратное неравенство и его решение	29
§ 7. Решение квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции	33
§ 8. Метод интервалов	38
Упражнения к главе II	43
Тестовые задания к главе II	45

Глава III. СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

§ 9. Степень с целым показателем	48
§ 10. Арифметический корень натуральной степени	53
§ 11. Свойства арифметического корня	56
§ 12. Степень с рациональным показателем	60
§ 13. Возведение в степень числового неравенства	66
Упражнения к главе III	70
Тестовые задания к главе III	72

Глава IV. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

§ 14. Область определения функции	76
§ 15. Возрастание и убывание функции	80
§ 16. Четность и нечетность функции	86
§ 17. Функция $y = \frac{k}{x}$	90
§ 18. Неравенства и уравнения, содержащие степень	94
Упражнения к главе IV	98
Тестовые задания к главе IV	101

Глава V. ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 19. Радианная мера угла	105
§ 20. Поворот точки вокруг начала координат	109
§ 21. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла	115
§ 22. Знаки синуса, косинуса и тангенса	121
§ 23. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла	124
§ 24. Тригонометрические тождества	128
§ 25. Синус, косинус, тангенс и котангенс углов α и $-\alpha$	131
§ 26. Формулы сложения	133
§ 27. Синус и косинус двойного угла	138
§ 28. Формулы приведения	140
§ 29. Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов ...	145
<i>Упражнения к главе V</i>	148
<i>Тестовые задания к главе V</i>	152

Глава VI. ПРОГРЕССИИ

§ 30. Арифметическая прогрессия	157
§ 31. Сумма n первых членов арифметической прогрессии	162
§ 32. Геометрическая прогрессия	166
§ 33. Сумма n первых членов геометрической прогрессии	171
§ 34. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	175
<i>Упражнения к главе VI</i>	181
<i>Тестовые задания к главе VI</i>	184
<i>Упражнения для повторения курса алгебры 9 класса</i>	187
<i>Упражнения для повторения курса алгебры 7–9 классов</i>	197
Краткие теоретические сведения по курсу алгебры 7–9 классов	210
Ответы	225
Предметный указатель	236
Именной указатель	236

Свободная продажа запрещена



"O'QITUVCHI"